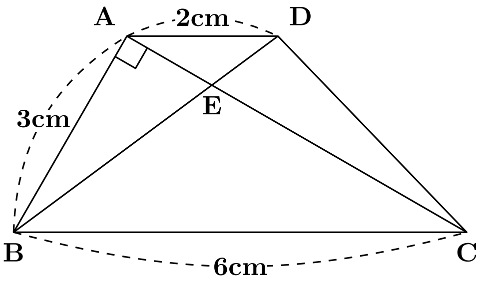
右の図のように、$AD /\!/ BC$, $AD = 2\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$ の台形 ABCD がある。線分 AC と線分 BD の交点を E、$\angle BAE = 90^\circ$ とする。



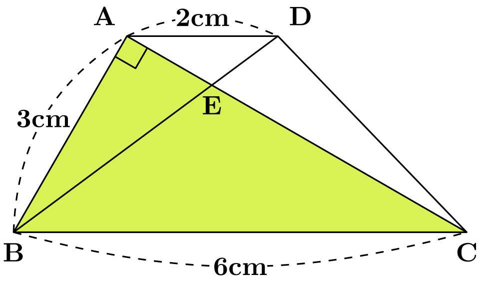
このとき、(1)〜(3)の各問いに答えなさい。

(1)　線分 AC の長さを求めなさい

直角三角形 △ABC で三平方の定理を使って

$$
\begin{aligned}
AC^2+3^2 &= 6^2 \\
AC^2+9 &= 36 \\
AC^2 &= 36-9 \\
AC^2 &= 27 \\
AC &= \sqrt{27} \\
AC &= 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

答



⑵　線分 CE の長さを求めなさい

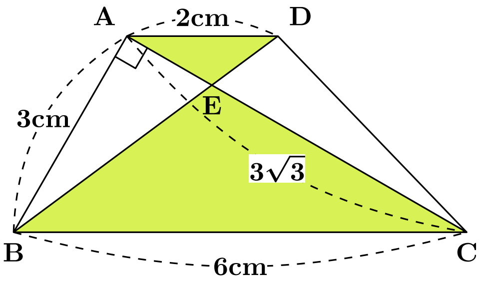
大問は　⑴を使って⑵を解く
パターンが多いので、

$$\triangle\mathrm{ADE} \backsim \triangle\mathrm{CBE}$$

と

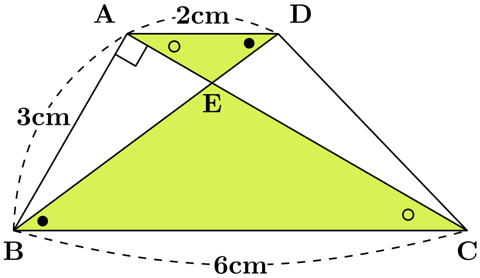
$$\mathrm{AE} = 3\sqrt{3} - \mathrm{CE}$$

に気づけば答えに近づくよ。



⑵　線分 CE の長さを求めなさい

AD//BC より、錯角が等しいので
$\angle ADE = \angle CBE$,
$\angle DAE = \angle BCE$ から
$\triangle ADE \backsim \triangle CBE$ なので
$AD : CB = AE : CE$ …①で、
$AE = 3\sqrt{3} - CE$ を①に代入して
$2cm : 6cm = 3\sqrt{3} - CE : CE$ となる。
この式は $6\,(3\sqrt{3} - CE) = 2 \times CE$ と変形できて



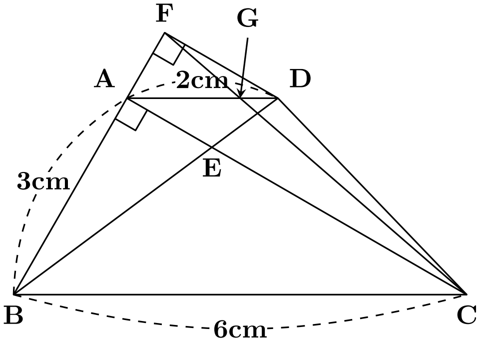
(2)　線分 CE の長さを求めなさい

$$
\begin{aligned}
6\left(3\sqrt{3}-\mathrm{CE}\right) &= 2\times\mathrm{CE}\\
3\left(3\sqrt{3}-\mathrm{CE}\right) &= \mathrm{CE}\\
9\sqrt{3}-3\mathrm{CE} &= \mathrm{CE}\\
-4\mathrm{CE} &= -9\sqrt{3}\\
\mathrm{CE} &= \frac{9\sqrt{3}}{4}\quad \boxed{\text{答}}
\end{aligned}
$$

⑶　点 D を通り直線 AC に平行な直線と、

直線 AB との交点を F とする。また、線分 CF と線分 AD との交点を G とする。

このとき、㋐～㋒の各問いに答えなさい。



㈠　$\triangle DFG \backsim \triangle ACG$ であることを証明しなさい

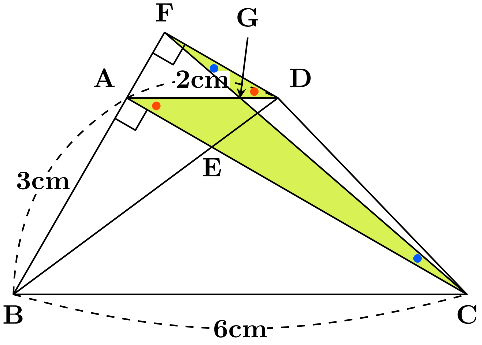
AC//FD より、錯角が等しいので

$\angle GAC = \angle GDF$,

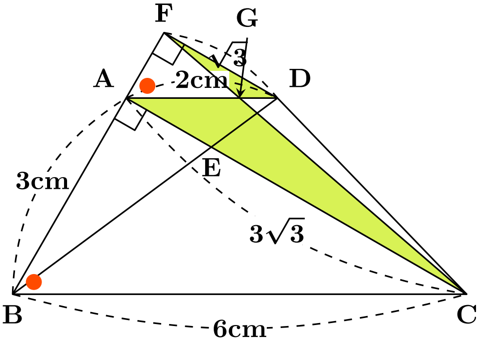
$\angle GCA = \angle GFD$ から、

2 つの角が等しいので

$\triangle DFG \backsim \triangle ACG$　答



(イ)　△DFG の面積を S とするとき、△ACG の面積を S を用いて表しなさい。



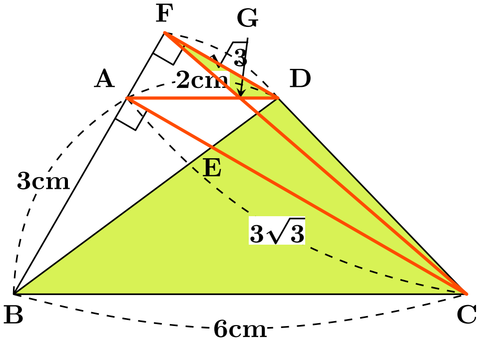
$\triangle ABC \backsim \triangle FAD$ なので
$BC : AC = AD : FD$ だから
$6 : 3\sqrt{3} = 2 : FD$ より
$FD = \sqrt{3}$ となる。

$\triangle ACG \backsim \triangle DFG$ の相似比は $3\sqrt{3} : \sqrt{3} = 3 : 1$ となって、面積比はその 2 乗で $3^2 : 1^1 = 9 : 1$ だから

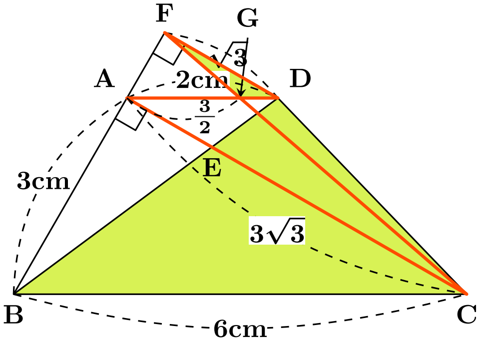
△ACG の面積は　$9S$　答

㈦　$\triangle$DFG の面積を S、$\triangle$BCD の面積を T とするとき、$S:T$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

㈠で $\triangle$ACG を求めているので $\triangle$ACG と $\triangle$BCD に着目すると高さが同じことに気づくよ！



(ウ)　△DFG の面積を S、△BCD の面積を T とするとき、$S:T$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

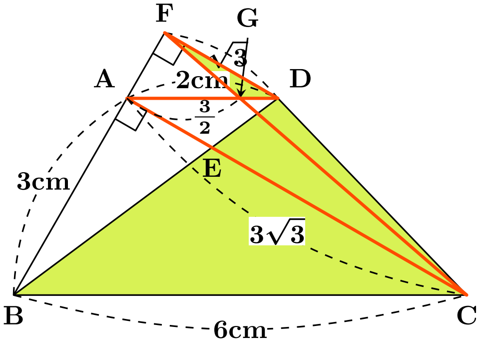


GD の長さを x とすると
△ACG ∽ △DFG の相似比は
$3:1$ なので $AG=3x$ となる。

$AD=3x+x=4x$ で $AD=2\text{cm}$ なので $x=\frac{1}{2}$ となって
$AG=\frac{3}{2}$ となる。AD//BC より △ACG と △BCD の高さは等しいので、面積は底辺の長さに比例する。

㈦　△DFG の面積を S、△BCD の面積を T と

するとき、$S:T$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。



面積比 △ACG : △BCD は $\frac{3}{2}:6=1:4$ になるので、面積 △ACG が $9S$ のとき

面積 △BCD は $4\times 9S=36S$ だから

$$S:T=S:36S=1:36 \quad \boxed{答}$$