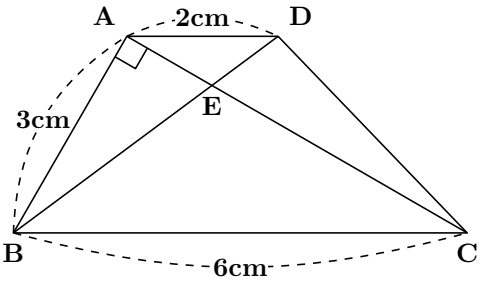
右の図のように、AD//BC, AD＝2cm, BC＝6cm, AB＝3cm の台形 ABCD がある。線分 AC と線分 BD の交点を E、∠BAE＝90° とする。



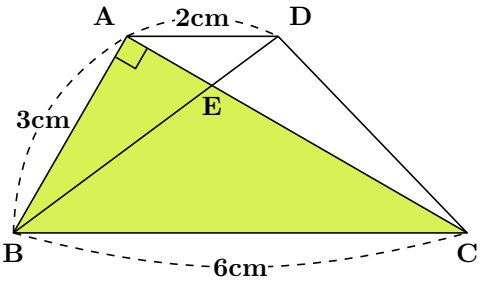
このとき、(1)〜(3)の各問いに答えなさい。

(1)　線分 AC の長さを求めなさい

直角三角形 △ABC で三平方の定理を使って

$$
\begin{aligned}
AC^2+3^2 &= 6^2 \\
AC^2+9 &= 36 \\
AC^2 &= 36-9 \\
AC^2 &= 27 \\
AC &= \sqrt{27} \\
AC &= 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

答



⑵　線分 CE の長さを求めなさい

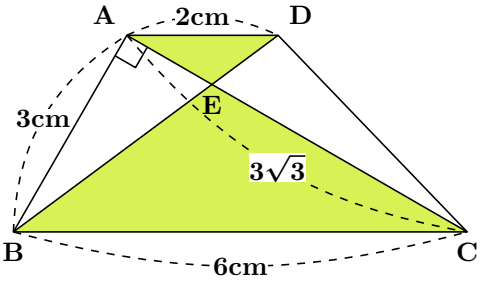
大問は　⑴を使って⑵を解く
パターンが多いので、

$$\triangle ADE \backsim \triangle CBE$$

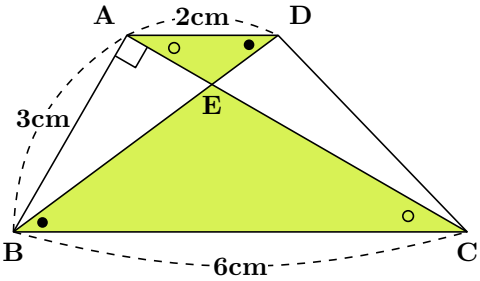
と

$$AE = 3\sqrt{3} - CE$$

に気づけば答えに近づくよ。



(2)　線分 CE の長さを求めなさい



AD//BC より、錯角が等しいので

$\angle ADE = \angle CBE$,

$\angle DAE = \angle BCE$ から

$\triangle ADE \backsim \triangle CBE$ なので

$AD : CB = AE : CE$ …①で、

$AE = 3\sqrt{3} - CE$ を①に代入して

$2cm : 6cm = 3\sqrt{3} - CE : CE$ となる。

この式は $6\left(3\sqrt{3} - CE\right) = 2 \times CE$ と変形できて

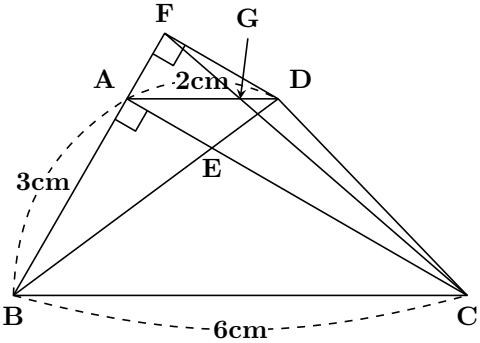
(2)　線分 CE の長さを求めなさい

$$
\begin{aligned}
6\,(3\sqrt{3}-\mathrm{CE}) &= 2\times\mathrm{CE} \\
3\,(3\sqrt{3}-\mathrm{CE}) &= \mathrm{CE} \\
9\sqrt{3}-3\mathrm{CE} &= \mathrm{CE} \\
-4\mathrm{CE} &= -9\sqrt{3} \\
\mathrm{CE} &= \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad \boxed{\text{答}}
\end{aligned}
$$

⑶　点 D を通り直線 AC に平行な直線と、

直線 AB との交点を F とする。また、線分 CF と線分 AD との交点を G とする。

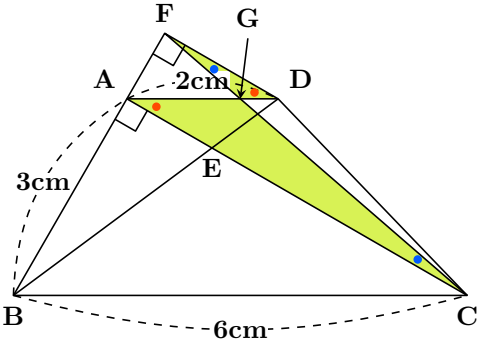
このとき、㈠〜㈢の各問いに答えなさい。



(ア)　△DFG ∽ △ACG であることを証明しなさい

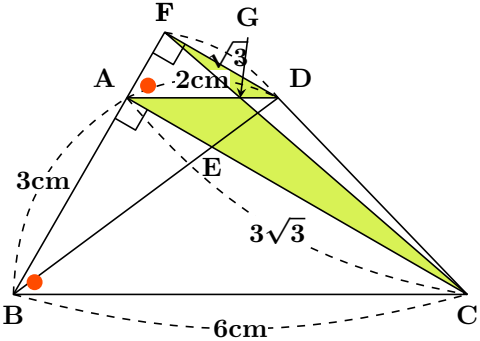
AC//FD より、錯角が等しいので
∠GAC＝∠GDF,
∠GCA＝∠GFD から、
2 つの角が等しいので

△DFG ∽ △ACG　答



(イ)　△DFG の面積を S とするとき、△ACG の面積を

S を用いて表しなさい。



△ABC ∽ △FAD なので

BC : AC = AD : FD だから

$6 : 3\sqrt{3} = 2 : \mathrm{FD}$ より

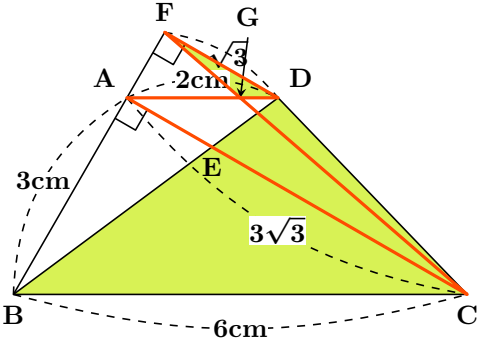
$\mathrm{FD} = \sqrt{3}$ となる。

△ACG ∽ △DFG の相似比は $3\sqrt{3} : \sqrt{3} = 3 : 1$ となって、面積比はその 2 乗で $3^2 : 1^1 = 9 : 1$ だから

△ACG の面積は　$9S$　答

㈠　△DFG の面積を S、△BCD の面積を T と

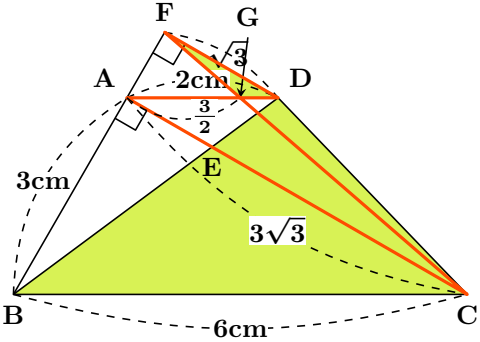
するとき、$S:T$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。



㈠で △ACG を求めているので △ACG と △BCD に着目すると高さが同じことに気づくよ！

(ウ)　△DFG の面積を S、△BCD の面積を T と

するとき、$S:T$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

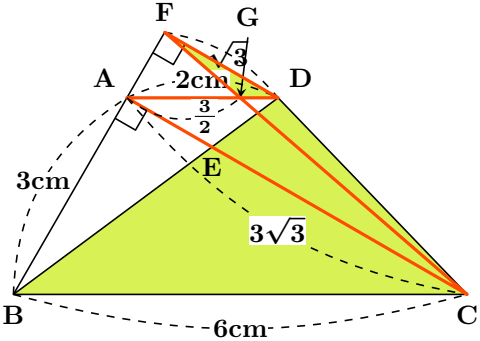


GD の長さを x とすると △ACG ∽ △DFG の相似比は $3:1$ なので $\mathrm{AG}=3x$ となる。

$\mathrm{AD}=3x+x=4x$ で $\mathrm{AD}=2\mathrm{cm}$ なので $x=\frac{1}{2}$ となって $\mathrm{AG}=\frac{3}{2}$ となる。AD//BC より △ACG と △BCD の高さは等しいので、面積は底辺の長さに比例する。

(ウ)　△DFG の面積を S、△BCD の面積を T と

するとき、$S:T$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。



面積比 △ACG : △BCD は $\frac{3}{2}:6=1:4$ になるので、面積 △ACG が $9S$ のとき

面積 △BCD は $4\times 9S=36S$ だから

$$S:T=S:36S=1:36 \quad \boxed{答}$$