$2x^2+5x+1=0$ の解が ○, △ のとき ○^{2}+△^{2}？

$2x^2+5x+1=0$ の解が ○, △ のとき ○^{2}+△^{2}?

解の公式を使うと $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$ と計算できるので、$\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right)^2+\left(\frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right)^2$ を計算すれば答えは出るが、計算が結構面倒だ。（この程度の計算は暗算でできるという人も居るだろうけど）

もっとよい方法はないものだろうか？

$2x^2+5x+1=0$ の解が ○, △ のとき $○^2+△^2$?

解が ○, △ とはのことだが

$$(x-○)(x-△)=0$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が $\bigcirc, \triangle$ のとき $\bigcirc^2+\triangle^2$?

解が $\bigcirc, \triangle$ とは
のことだが

$$(x-\bigcirc)(x-\triangle)=0$$

$$(x-\bigcirc)(x-\triangle)=x^2-(\bigcirc+\triangle)x+\bigcirc\times\triangle$$

だけでは、

$2x^2+5x+1=0$ の解が ○, △ のとき $○^2+△^2$?

解が ○, △ とは　$(x-○)(x-△)=0$

のことだが

$$(x-○)(x-△)=x^2-(○+△)x+○\times△$$

だけでは、問題文とは x^2 の係数が合わない。

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2+5x+1=0$$

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2+5x+1=0$$

$$\frac{2x^2+5x+1}{2}=\frac{0}{2}$$

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2+5x+1=0$$

$$\frac{2x^2+5x+1}{2}=\frac{0}{2}$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$$

式を比較すると

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=(x-\bigcirc)(x-\triangle)$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が $\bigcirc, \triangle$ のとき $\bigcirc^2+\triangle^2$?

式を比較すると

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=(x-\bigcirc)(x-\triangle)$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=x-(\bigcirc+\triangle)x+\bigcirc\times\triangle$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が $\bigcirc, \triangle$ のとき $\bigcirc^2+\triangle^2$?

式を比較すると

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=(x-\bigcirc)(x-\triangle)$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=x-(\bigcirc+\triangle)x+\bigcirc\times\triangle$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が $\bigcirc, \triangle$ のとき $\bigcirc^2+\triangle^2$？

だから

$$-(\bigcirc+\triangle)=\frac{5}{2} \qquad \bigcirc\times\triangle=\frac{1}{2}$$

つまり

$$\bigcirc+\triangle=-\frac{5}{2} \qquad \bigcirc\times\triangle=\frac{1}{2}$$

となる。

公式（解と係数の関係）

公式にすると、次のようになる。

$\boxed{あ}\, x^2 + \boxed{い}\, x + \boxed{う} = 0$ の解が $x = ○, △$ のとき

$$○ + △ = -\frac{\boxed{い}}{\boxed{あ}} \qquad ○ \times △ = \frac{\boxed{う}}{\boxed{あ}}$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が $\bigcirc, \triangle$ のとき $\bigcirc^2+\triangle^2$?

次に、公式 $\bigcirc^2+2\times\bigcirc\times\triangle+\triangle^2=(\bigcirc+\triangle)^2$
を変形すると

$$\bigcirc^2+\triangle^2=(\bigcirc+\triangle)^2-2\times\bigcirc\times\triangle$$

となるので、先ほどの
$\bigcirc+\triangle=-\frac{5}{2}$　$\bigcirc\times\triangle=\frac{1}{2}$ を代入して

$$\bigcirc^2+\triangle^2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が ○, △ のとき ○^{2}+△^{2}?

$$\bigcirc^2 + \triangle^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2}$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が $\bigcirc, \triangle$ のとき $\bigcirc^2+\triangle^2$？

$$\bigcirc^2+\triangle^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - 1$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が ○, △ のとき ○^{2}+△^{2}?

$$\bigcirc^2+\triangle^2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{25}{4}-1$$

$$=\frac{25}{4}-\frac{4}{4}$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が ○, △ のとき ○^{2}+△^{2}?

$$\bigcirc^2+\triangle^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - 1$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{4}{4} = \frac{21}{4}$$