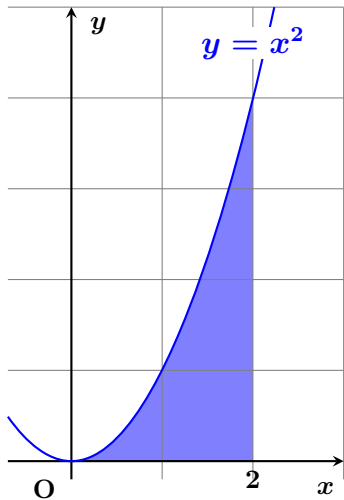
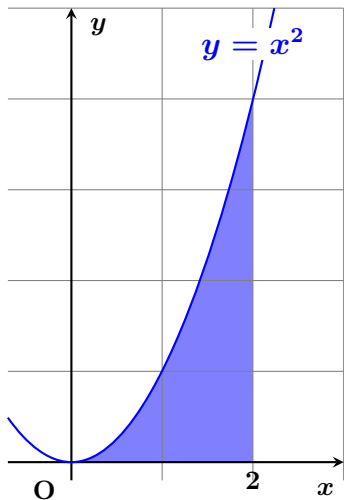


$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



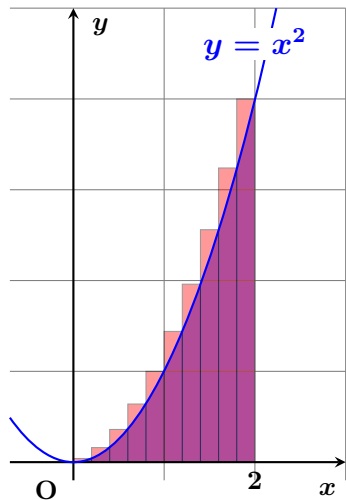
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2 dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

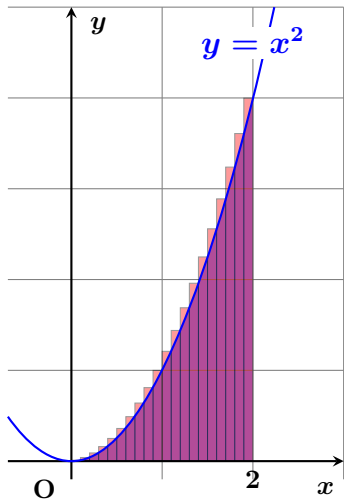
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2 dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

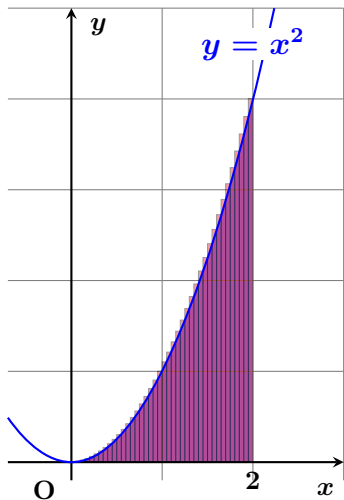
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2 dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

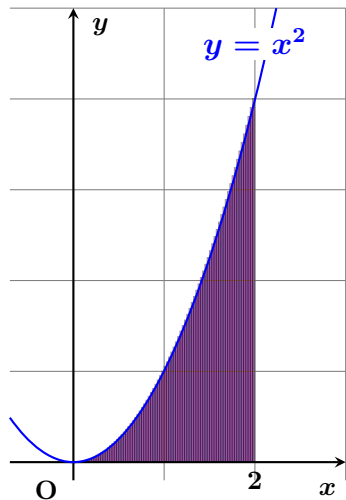
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2 dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

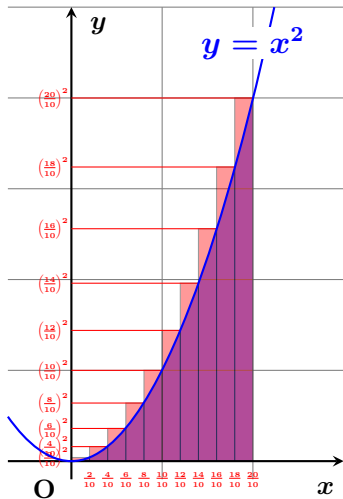
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2 dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

$y = x^2$, $x = 20$, x 軸で囲まれる部分の面積？



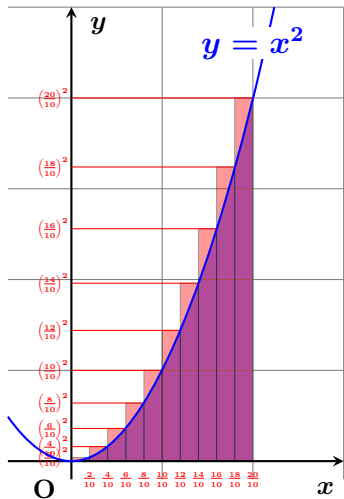
10 分割したとき、長方形の横幅はすべて $\frac{2}{10}$ です。それぞれの高さは

$$\left(\frac{2}{10}\right)^2, \left(\frac{4}{10}\right)^2, \left(\frac{6}{10}\right)^2, \left(\frac{8}{10}\right)^2, \left(\frac{10}{10}\right)^2$$

$$\left(\frac{12}{10}\right)^2, \left(\frac{14}{10}\right)^2, \left(\frac{16}{10}\right)^2, \left(\frac{18}{10}\right)^2, \left(\frac{20}{10}\right)^2$$

となります。

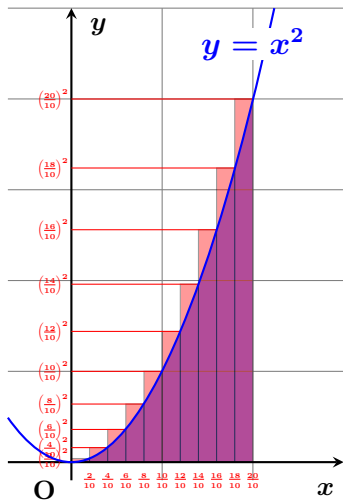
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



面積の総和は次のとおりです。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{4}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} \\ & + \left(\frac{6}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{8}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} \\ & + \left(\frac{10}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{12}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} \\ & + \left(\frac{14}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{16}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} \\ & + \left(\frac{18}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{20}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} \end{aligned}$$

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

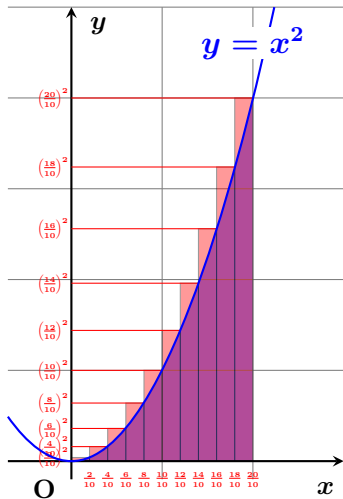


$\frac{2}{10}$ でくくると

$$\begin{aligned} & \frac{2}{10} \left(\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 \right. \\ & \quad + \left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{10}{10}\right)^2 + \left(\frac{12}{10}\right)^2 + \left(\frac{14}{10}\right)^2 \\ & \quad \left. + \left(\frac{16}{10}\right)^2 + \left(\frac{18}{10}\right)^2 + \left(\frac{20}{10}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

となります。

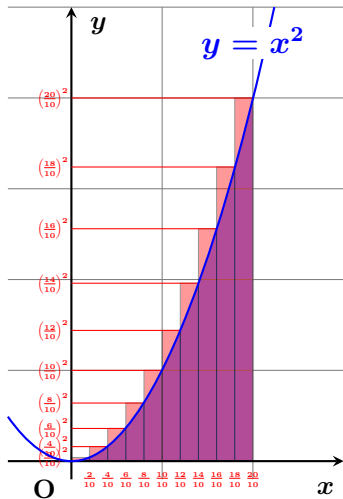
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



Σ を使って表すと

$$\frac{2}{10} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2k}{10}\right)^2 \text{ となります。}$$

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



Σ を使って表すと

$$\frac{2}{10} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2k}{10}\right)^2 \text{ となります。}$$

n 分割したときは

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \text{ となります。 } n \text{ を}$$

どんどん大きくすれば求める面積となります。

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2$$

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{4k^2}{n^2}$$

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2 &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{4k^2}{n^2} \\ &= \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2\end{aligned}$$

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2 &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{4k^2}{n^2} \\ &= \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2\end{aligned}$$

公式 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を代入して

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$= \frac{8}{n^3} \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

n をどんどん大きくすればいいので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)}{\frac{3n^2}{n^2}}$$

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)}{\frac{3n^2}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{3} \\ &= \frac{4\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)\left(2 + \frac{1}{\infty}\right)}{3} \end{aligned}$$

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$= \frac{4\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)\left(2 + \frac{1}{\infty}\right)}{3}$$

$$= \frac{4(1 + 0)(2 + 0)}{3}$$

$$= \frac{4 \times 1 \times 2}{3} = \langle \text{答} \rangle \frac{8}{3}$$

面積を求める方法の歴史

区分求積法（極限を使って面積を求める方法）は古くから長年使われていた方法でしたが、17世紀に考案された積分法の方が簡単に答えが出せるので、主役の座を譲りました。

積分法で解くと…

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

あ

っ という間に答えが出ますね。

普通、高校の教科書では簡単に答えが出る積分法を学習した後で、計算が少し面倒な区分求積法を学びますが、数学の歴史と逆なのです。