問題に書かれている漸化式（ぜんかしき）を変形して

$a_{n+2}-a_{n+1}=3\,(a_{n+1}-a_n)$ …① とする。

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと①は $b_{n+1}=3b_n$ となるから、数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で、初項は $b_1=a_2-a_1=4-1=3$ となる。

数列 $\{b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列だから一般項は $b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$ となる。

■ 等比数列の一般項

$$a_n=ar^{n-1}$$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列だから

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k = 1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$= 1+\frac{3^n-3}{2} = \frac{3^n-1}{2}$$

一旦停止

■ 階差数列と一般項

$n \geqq 2$ のとき $\quad a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

■ 等比数列の和

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

初項は $a_1=1$ なので $a_n=\dfrac{3^n-1}{2}$ は $n=1$ のときも成り立つ。したがって、一般項は

$$\boxed{\text{答}} \quad a_n=\frac{3^n-1}{2}$$

一般化すると

$a_{n+2}=(p+1)a_{n+1}-pa_n$ の形の漸化式は

$$a_{n+2}-a_{n+1}=p\left(a_{n+1}-a_n\right)$$

へ変形できるので、階差数列を使って求めることができます。

上記の形以外の**隣接 3 項間の漸化式**の一般項を求めるのは、難しい学習内容になります。

keyword【特性方程式】 web