階差数列で一般項を求める

$$\underset{①}{1},\quad \underset{②}{2},\quad \underset{③}{5},\quad \underset{④}{10},\quad \underset{⑤}{17},\quad \underset{⑥}{26},\quad \underset{⑦}{37},\ \cdots$$

$$\underset{①}{1}\quad \underset{②}{3}\quad \underset{③}{5}\quad \underset{④}{7}\quad \underset{⑤}{9}\quad \underset{⑥}{11}$$ 階差数列

階差数列で一般項を求める

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦

$$1,\quad 2,\quad 5,\quad 10,\quad 17,\quad 26,\quad 37,\ \cdots$$

$$1 + \underset{①}{1} + \underset{②}{3} + \underset{③}{5} + \underset{④}{7} + \underset{⑤}{9} + \underset{⑥}{11} = 37$$

階差数列

階差数列で一般項を求める

①　②　③　④　⑤　⑥　⑦

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, …

1ずれる

＋ 1 ＋ 3 ＋ 5 ＋ 7 ＋ 9 ＋ 11　階差数列

①　②　③　④　⑤　⑥

第⑦項＝初項＋階差数列①〜⑥の合計

公式（階差数列と一般項）

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$a_n =$ 初項 $+$ 階差数列 第 $n-1$ 項までの合計

数列 $\{a_n\}$　$1, 2, 5, 10, 17, \cdots$ の一般項？

階差数列を b_n とすると $1, 3, 5, 7, \cdots$ なので
初項 $b_1 = 1$,　公差 $d = 2$ の等差数列だから

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_1 + (n-1)d \\
&= 1 + (n-1)\cdot 2 \\
&= 2n - 1
\end{aligned}
$$

公式【等差数列の一般項】

一旦停止

$b_n = 2n - 1$　　$\{a_n\}$ $1, 2, 5, 10, 17, \cdots$

よって $n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k - \sum_{k=1}^{n-1} 1
\end{aligned}
$$

← 【分けてよい】

$b_n = 2n - 1 \qquad \{a_n\}\ 1, 2, 5, 10, 17, \cdots$

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1
\end{aligned}
$$

一旦停止

← 【数字は前に出してよい】

準備します

公式　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$　(c は定数)

$n \to n-1$ と置き換える

$$\sum_{k=1}^{n-1} 1 = 1(n-1) = n-1$$

一旦停止

準備します 2

公式 $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$n \to n-1$ と置き換える

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k &= \frac{1}{2}(n-1)\Big((n-1)+1\Big) \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)\end{aligned}$$

一旦停止

元に戻って代入

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1+2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= 1+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1) \\
&= 1+ \quad n^2-n \quad -n+1 \\
&= \quad n^2-2n+2
\end{aligned}
$$

一旦停止

gbb60166 プレ高数学科

初項は $a_1=1$ なので $a_n=n^2-2n+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

答　$a_n=n^2-2n+2$