$\sum$ の性質

性質 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k-5)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}5$$

【分けてよい】

$\sum$ の性質

性質 (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ （ c は定数 ）

$$\sum_{k=1}^{n} 8k = 8\sum_{k=1}^{n} k = 8 \times \sum_{k=1}^{n} k \text{【のこと】} = 8 \cdot \sum_{k=1}^{n} k$$

【数字は前に出してよい】

計算例

公式 (1) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ （ c は定数 ）　公式 (2) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+3) = \sum_{k=1}^{n} 4k + \sum_{k=1}^{n} 3$$

← 【分けてよい】

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k + 3n$$

← 【数字は前に出してよい】

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 3n$$

$$= 2n(n+1) + 3n$$

$$= n\left(2(n+1)+3\right)$$

← 【n でくくる】

計算例

$$= n\left(2(n+1)+3\right)$$

$$= n(2n+2+3)$$

$$= n(2n+5) \quad \boxed{\text{答}}$$

計算例

$\sum_{k=1}^{n} c = nc$　$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$　$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k-3) = \sum_{k=1}^{n}(k^2-5k+6)$$ ← 【展開する】

【分けてよい/数字は前】➡
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 6$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 5\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 6n$$

計算例

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) + 6n$$

$$= \frac{1}{6}n\Big((n+1)(2n+1) - 15(n+1) + 36\Big)$$

$$= \frac{1}{6}n(\quad 2n^2 + 3n + 1 \quad - 15n - 15 + 36)$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 - 12n + 22)$$

計算例

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 - 12n + 22)$$

$$= \frac{1}{6}n \cdot 2(n^2 - 6n + 11)$$

$$= \frac{1}{3}n(n^2 - 6n + 11)$$ 答

$\sum$ のかけ算はダメです

$$\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k-3)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-2)\times\sum_{k=1}^{n}(k-3)$$

はダメ！

計算例

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k^3 - k) &= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 - \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{2}n(n+1)\left(\frac{1}{2}n(n+1) - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}n(n+1) \cdot \frac{1}{2}\left(n(n+1) - 2\right)
\end{aligned}$$

計算例

$$= \frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{2}\Big(n(n+1)-2\Big)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{2}\Big(n^2+n-2\Big)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n-1)(n+2)$$ 答