数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = a > 0$,　$a_{n+1} = 16{a_n}^3$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすものとする。

(1)　数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ とするとき、$\{b_n\}$ の一般項を a と n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を a と n を用いて表せ。

(3)　すべての n について $a_n = a$ を満たすような a の値を求めよ。

$a_1 > 0$ で $a_{n+1} = 16{a_n}^3$ より $\{a_n\}$ はすべて正の数である。 ※ 当然 $\log_2$ を計算することになるので

漸化式の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2(16{a_n}^3)$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 16 + \log_2 {a_n}^3$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2^4 + 3\log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2^4 + 3\log_2 a_n$$
$$\log_2 a_{n+1} = 4\log_2 2 + 3\log_2 a_n$$
$$\log_2 a_{n+1} = 4 + 3\log_2 a_n$$

$b_n = \log_2 a_n$ とすると $b_{n+1} = 3b_n + 4$ …① だ。

① の変形は**特性方程式**と呼ばれ $\beta = 3\beta + 4$ …②
を解くと $\beta = -2$ となる。① − ② を計算すると

特性方程式

$$
\begin{array}{rrcl}
 & b_{n+1} & = & 3b_n + 4 \\
-) & \beta & = & 3\beta + 4 \\
\hline
 & b_{n+1} - \beta & = & 3b_n - 3\beta \\
 & b_{n+1} - \beta & = & 3\left(b_n - \beta\right)
\end{array}
$$

さっき $\beta = -2$ だったので $b_{n+1} + 2 = 3\left(b_n + 2\right)$ となる。

等比数列の公式に持ち込めた

$$b_{n+1}+2=3\left(b_n+2\right)$$

数列 $\{b_n+2\}$ は初項 $b_1+2=\log_2 a+2$ ，公比 3 の等比数列だから

$$\begin{aligned} b_n+2 &= (\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1} \\ b_n &= (\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}-2 \quad \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$

$\log_2 2 = 1$ を使って式を細工する

$b_n = \log_2 a_n$ だったので、この式を指数の書き方でかくと $a_n = 2^{b_n}$ となるから、⑴の答えを代入して

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^{b_n} \\
a_n &= 2^{(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}-2} \\
a_n &= 2^{(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}} \cdot 2^{-2} \\
a_n &= 2^{(\log_2 a+2\log_2 2)\cdot 3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + 2\log_2 2)\cdot 3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + \log_2 2^2)\cdot 3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + \log_2 4)\cdot 3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 4a)\cdot 3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 4a)\cdot 3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = \left(2^{\log_2 4a}\right)^{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

一旦停止

$2^{\log_2 4a}$ をシンプルに表したい

$x = 2^{\log_2 4a}$ とおいて両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\begin{aligned}\log_2 x &= \log_2 2^{\log_2 4a} \\ \log_2 x &= \log_2 4a \cdot \log_2 2 \\ \log_2 x &= \log_2 4a\end{aligned}$$

よって $x = 4a$ となるので、元に戻って

たぶんこれが模範解答として発表されたのだろう…

$$a_n = \left(2^{\log_2 4a}\right)^{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{(4a)^{3^{n-1}}}{4} \quad \boxed{答}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}-2} \quad \boxed{答}$$

じゃダメなのかな？

(3)を解きます

$a_2 = 16{a_1}^3 = 16a^3$ となる。

すべての n について $a_n = a$ となるためには
$a_2 = a$ であることが必要だから $16a^3 = a$

因数分解して $a(4a+1)(4a-1) = 0$
$a > 0$ であるから $a = \frac{1}{4}$

$a_n = \dfrac{(4a)^{3^{n-1}}}{4}$ でしたよね

逆に $a = \dfrac{1}{4}$ のとき⑵の結果から

$$a_n = \frac{1^{3^{n-1}}}{4} = \frac{1}{4} = a$$

となり、すべての n について $a_n = a$ を満たす。

よって $a = \dfrac{1}{4}$ 答