$\triangle$ABC の重心を G とし、$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{c}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\mathrm{BP} : \mathrm{PA} = 2 : 3$ となる点 P を辺 AB 上にとり、直線 PG と直線 BC が交わる点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ を $\vec{c}$ を用いて表せ。

誘導問題とは

大問の場合は

⑴を使って⑵を解く

⑵を使って⑶を解く

とか

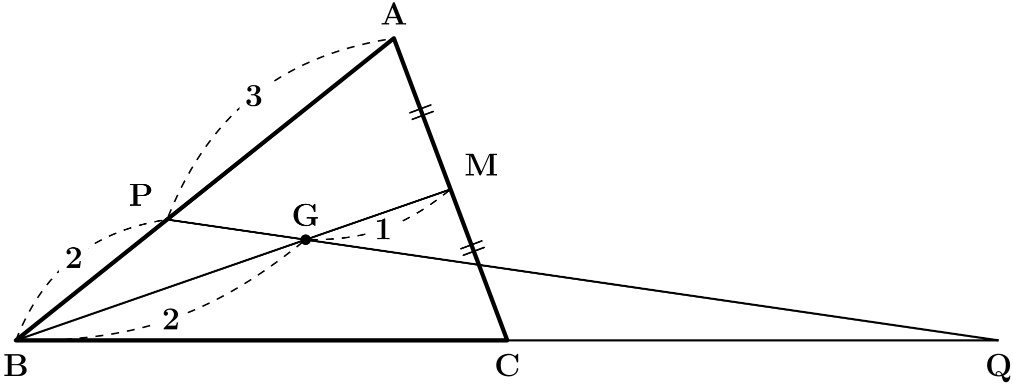
⑴をヒントにして⑵を解く

⑵をヒントにして⑶を解く

が、よくあるので覚えておきましょう。

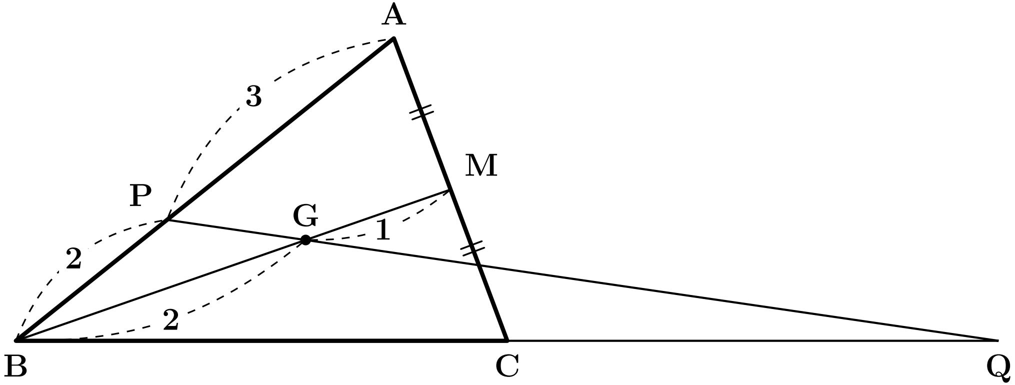
辺 AC の中点を M とすると

Gは重心なのでBG:GM＝2:1になる

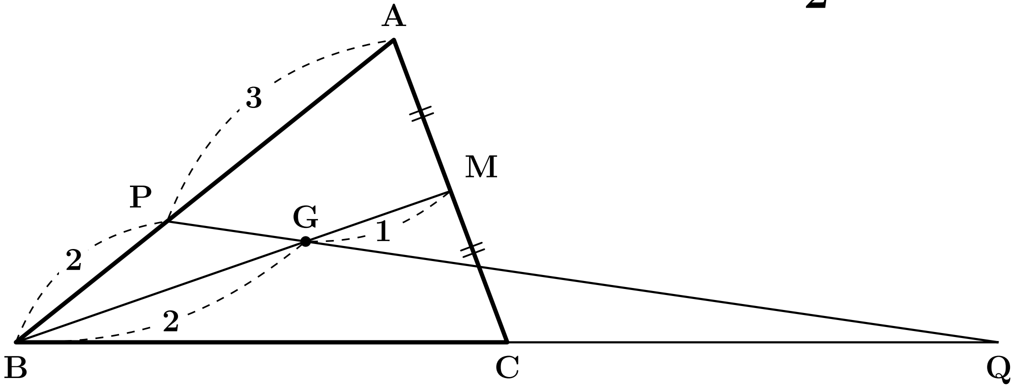


辺 AC の中点を M とすると

よって$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BM}}$になる



またMは中点なので$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{2}$だ

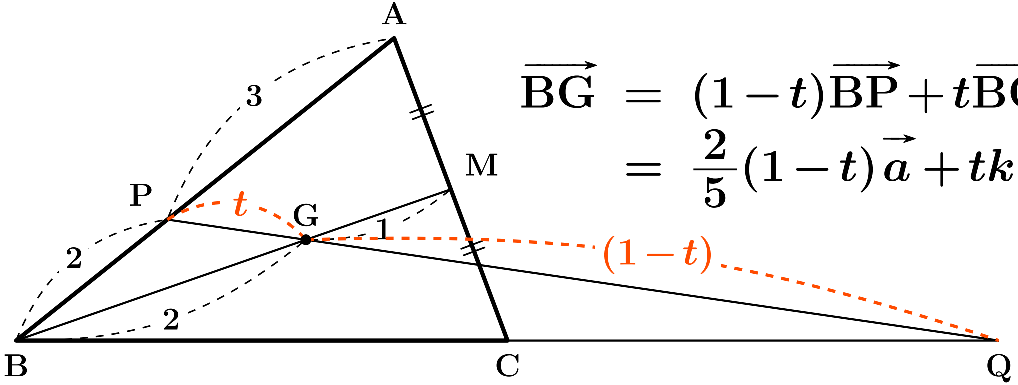


よってこうなる

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BG}} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BM}} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{2} \\ &= \frac{\vec{a}+\vec{c}}{3} \quad \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$

次に(2)を解きます

$\mathrm{PG}:\mathrm{GQ}=t:(1-t)$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=k\vec{c}$ $(t, k$は実数$)$とおくと



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BG}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BP}}+t\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\\ &= \frac{2}{5}(1-t)\vec{a}+tk\vec{c}\end{aligned}$$

⑴を使って⑵を解くパターンだよ

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ は⑴でも求めたので

$$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{3} = \frac{2}{5}(1-t)\vec{a}+tk\vec{c}$$

$$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c} = \frac{2}{5}(1-t)\vec{a}+tk\vec{c}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \not\parallel \vec{c}$ なので

$\vec{a}$, $\vec{c}$ それぞれの係数を比較して

$$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{2}{5}(1-t)\vec{a}+tk\vec{c}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{5}(1-t),\qquad \frac{1}{3}=tk$$

これを解いて $t=\dfrac{1}{6}$, $k=2$ となる。

よって $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=2\vec{c}$ 　答