

氏名 _____

■ 必要条件・十分条件

「 $p \implies q$ 」が真のとき

p は q であるための **十分条件**
 q は p であるための **必要条件**

十 \implies 必

という。

例 1 「人間 \implies 動物」は真でなので

人間は動物であるための**十分条件**

動物は人間であるための**必要条件**

例 2 「ある自然数の一の位が偶数 \implies ある自然数は偶数」は真でなので

「ある自然数の一の位が偶数」は「ある自然数は偶数」であるための**十分条件**

「ある自然数は偶数」は「ある自然数の一の位が偶数」であるための**必要条件**

1 命題「 $x = 4 \implies x^2 = 16$ 」と、その逆「 $x^2 = 16 \implies x = 4$ 」の真偽を調べ、次の の中に「必要」「十分」のうち当てはまる言葉を入れなさい。

(1) $x = 4$ は $x^2 = 16$ であるための 条件である。

(2) $x^2 = 16$ は $x = 4$ であるための 条件である。

「 $p \implies q$ 」とその逆「 $q \implies p$ 」が両方とも真のとき、 p は q であるための **必要十分条件** といい、 $p \iff q$ と書く。

2 命題「 $p \implies q$ 」と、その逆「 $q \implies p$ 」の真偽を調べ、 p が q であるための必要十分条件になっているものを選びなさい。

(1) $p: x = 3$ $q: 2x + 1 = 7$

(2) $p: x^2 + x - 2 = 0$ $q: x = 1$

(3) $p: x = y$ $q: x + 5 = y + 5$

(4) $p: n$ が 4 で割り切れる $q: n$ は偶数

■ 命題の対偶

命題「 $p \implies q$ 」のとき「 q でない $\implies p$ でない」を **対偶** という。

「 p でない」ことを \bar{p} と書くことにすると、対偶は「 $\bar{q} \implies \bar{p}$ 」と書くことができる。

命題「 $p \implies q$ 」が**真**ならば、その対偶「 $\bar{q} \implies \bar{p}$ 」もかならず**真**となる。
 命題「 $p \implies q$ 」が**偽**ならば、その対偶「 $\bar{q} \implies \bar{p}$ 」もかならず**偽**となる。

例 3 「人間 \implies 動物」は真である。その対偶は「動物でない \implies 人間でない」となり、これもまた真となる。

例 4 アリバイは対偶を利用している。ある犯行が起こったとき「A さんは犯人 \implies 犯行時刻に現場にいた」は真である。その対偶「A さんは犯行時刻には現場にいなかった \implies 犯人ではない」は真なので、A さんは犯行時刻には現場にいなかった（別の場所にいた）を確認して、犯人でないことを証明している。

例 5 アリバイは背理法とも言える。

- A さんは犯人だと仮定する
- すると A さんは犯行時刻には現場にいたはずである。
- しかし A さんは犯行時刻には別の場所にいたことが確認されている。
- A さんが同じ時間に 2 箇所の場所にいることは不可能である（矛盾）
- これは仮定が間違っているからである。つまり A さんは犯人ではない。

3 次の命題の対偶をいいなさい。

(1) $x < -1 \implies x \leq 0$

(2) n は偶数 $\implies n + 2$ は偶数

(3) n^2 は奇数 $\implies n$ は奇数