数学I　集合と命題プリント# 4

年　組　号

氏名

■ 必要条件・十分条件

「$p \Longrightarrow q$」が真のとき

p は q であるための十分条件(じゅうぶんじょうけん)

q は p であるための必要条件(ひつようじょうけん)

という。

十 $\Longrightarrow$ 必

例 1　「人間 $\Longrightarrow$ 動物」は真でなので

人間は動物であるための十分条件

動物は人間であるための必要条件

例 2　「ある自然数の一の位が偶数 $\Longrightarrow$ ある自然数は偶数」は真でなので

「ある自然数の一の位が偶数」は「ある自然数は偶数」であるための十分条件

「ある自然数は偶数」は「ある自然数の一の位が偶数」であるための必要条件

1　命題「$x = 4 \Longrightarrow x^2 = 16$」と、その逆「$x^2 = 16 \Longrightarrow x = 4$」の真偽を調べ、次の $\boxed{\quad}$ の中に「必要」「十分」のうち当てはまる言葉を入れなさい。

(1)　$x = 4$ は $x^2 = 16$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件である。

(2)　$x^2 = 16$ は $x = 4$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件である。

「$p \Longrightarrow q$」とその逆「$q \Longrightarrow p$」が両方とも真のとき、p は q であるための必要十分条件(ひつようじゅうぶんじょうけん)といい、$p \Longleftrightarrow q$ と書く。

2　命題「$p \Longrightarrow q$」と、その逆「$q \Longrightarrow p$」の真偽を調べ、p が q であるための必要十分条件になっているものを選びなさい。

(1)　p: $x = 3$　　q: $2x + 1 = 7$

(2)　p: $x^2 + x - 2 = 0$　　q: $x = 1$

(3)　p: $x = y$　　q: $x + 5 = y + 5$

(4)　p: n が 4 で割り切れる　　q: n は偶数

■ 命題の対偶

命題「$p \Longrightarrow q$」のとき「q でない $\Longrightarrow p$ でない」を対偶(たいぐう)という。

「p でない」ことを $\overline{p}$ と書くことにすると、対偶は「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」と書くことができる。

> 命題「$p \Longrightarrow q$」が真ならば、その対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」もかならず真となる。
> 命題「$p \Longrightarrow q$」が偽ならば、その対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」もかならず偽となる。

例 3　「人間 $\Longrightarrow$ 動物」は真である。その対偶は「動物でない $\Longrightarrow$ 人間でない」となり、これもまた真となる。

例 4　アリバイは対偶を利用している。ある犯行が起こったとき

「A さんは犯人 $\Longrightarrow$ 犯行時刻に現場にいた」は真である。

その対偶「A さんは犯行時刻には現場にいなかった $\Longrightarrow$ 犯人ではない」は真なので、A さんは犯行時刻には現場にいなかった（別の場所にいた）を確認して、犯人でないことを証明している。

例 5　アリバイは背理法とも言える。

- A さんは犯人だと仮定する
- すると A さんは犯行時刻には現場にいたはずである。
- しかし A さんは犯行時間には別の場所にいたことが確認されている。
- A さんが同じ時間に 2 箇所の場所にいることは不可能である（矛盾）
- これは仮定が間違っているからである。つまり A さんは犯人ではない。

3　次の命題の対偶をいいなさい。

(1)　$x < -1 \Longrightarrow x \leqq 0$　　　(2)　n は偶数 $\Longrightarrow n + 2$ は偶数

(3)　n^2 は奇数 $\Longrightarrow n$ は奇数

集合と命題プリント#4 **1** 命題は真、逆は偽　(1) 十分条件 (2) 必要条件 **2** (1) 命題は真、逆は真 (2) 命題は偽、逆は真 (3) 命題は真、逆は真 (4) 命題は真、逆は偽 必要十分条件となっているのは(1), (3) **3** (1) $x > 0 \Longrightarrow x \geqq -1$ (2) $n + 2$ は奇数 $\Longrightarrow n$ は奇数 (3) n は偶数 $\Longrightarrow n^2$ は偶数