

氏名 _____

■ 解と係数の関係

あ $x^2 +$
い $x +$
う $= 0$ の 2 つの解を \bigcirc, \triangle とすると

$$\bigcirc + \triangle = -\frac{\text{い}}{\text{あ}} \quad \bigcirc \times \triangle = \frac{\text{う}}{\text{あ}}$$

例 1 (1) $x^2 + 2x + 3 = 0$ の 2 つの解の和と積を求めなさい。
2 つの解を \bigcirc, \triangle とすると

$$\bigcirc + \triangle = -\frac{\text{い}}{\text{あ}} = -\frac{2}{1} = -2 \text{ になり、} \quad \bigcirc \times \triangle = \frac{\text{う}}{\text{あ}} = \frac{3}{1} = 3 \text{ になる。}$$

答 和 (たし算) -2 , 積 (かけ算) 3

(2) $3x^2 + 4x + 7 = 0$ の 2 つの解を \bigcirc, \triangle とすると

$$\bigcirc + \triangle = -\frac{4}{3} \text{ になり、} \quad \bigcirc \times \triangle = \frac{7}{3} \text{ になる。}$$

答 和 $-\frac{4}{3}$, 積 $\frac{7}{3}$

(3) $4x^2 - 6x - 3 = 0$ の 2 つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{-6}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ になり、} \quad \alpha\beta = \frac{-3}{4} \text{ になる。}$$

答 和 $\frac{3}{2}$, 積 $-\frac{3}{4}$

1 次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積を求めなさい。

(1) $x^2 + 7x + 6 = 0$

(2) $x^2 - 3x + 5 = 0$

(3) $x^2 - 5x - 6 = 0$

(4) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

(5) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

(6) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

例 2 $x^2 + 2x - 5 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき次の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

解答 解と係数の関係から次のことが分かることを利用する。

$$\alpha + \beta = -\frac{\text{い}}{\text{あ}} = -\frac{2}{1} = -2 \text{ となり、} \quad \alpha\beta = \frac{\text{う}}{\text{あ}} = \frac{-5}{1} = -5 \text{ となる。}$$

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -5 \times (-2) = 10$ 答

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha\beta} + \frac{\alpha}{\alpha\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$ 答

(3) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \times (-5) = 4 + 10 = 14$ 答

2 $x^2 - 7x + 3 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき次の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

3 $3x^2 - 2x - 4 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき次の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

例3 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めなさい。

考え方 解の公式を使えば2つの解は $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ と計算できるが $\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right)^2$ を計算するのは結構面倒である。

でも $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ なので、解と係数の関係を使うと計算が楽になる。

解 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ だから $\text{あ} = 2$, $\text{い} = -3$, $\text{う} = -1$ である。

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{\text{い}}{\text{あ}} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{\text{う}}{\text{あ}} = \frac{-1}{2} \text{ となる。}$$

よって

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{-1}{2} \\ &= \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} = \frac{13}{4} \quad \square \end{aligned}$$

4 $2x^2 + 4x + 3 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めなさい。

5 $2x^2 - x + 4 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めなさい。

6 $3x^2 - 2x - 12 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めなさい。