

■ 高次方程式（共通因数/公式を使って/置き換え）

例1 $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$ を解きなさい。

解答 $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$ x でくくる
 $x(x^2 + 5x - 6) = 0$ $x^2 + 5x - 6$ を因数分解
 $x(x - 1)(x + 6) = 0$
 $x = 0$ または $x - 1 = 0$ または $x + 6 = 0$
 $x = 0$ または $x = 1$ または $x = -6$
 まとめると $x = 0, 1, -6$ 答

1 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3 + x^2 - 6x = 0$ (2) $x^3 - 11x^2 + 18x = 0$

例2 $x^3 - 8 = 0$ を解きなさい。

解答 $x^3 - 8 = x^3 - 2^3$ なので、公式を使って因数分解ができる。

$x^3 - 8 = 0$
 $x^3 - 2^3 = 0$ 公式 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ を使って因数分解
 $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$ $x^2 + 2x + 4 = 0$ は因数分解できないので解の公式で解く
 $x - 2 = 0$ または $x^2 + 2x + 4 = 0$
 $x = 2$ または $x^2 + 2x + 4 = 0$

解の公式を使って

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}i}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{2(-1 \pm \sqrt{3}i)}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

まとめると $x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$ 答

2 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3 + 1 = 0$ (2) $x^3 - 27 = 0$

例3 $x^4 - x^2 - 6 = 0$ を解きなさい。

解答 $x^2 = M$ と置き換えて因数分解する。

$(x^2)^2 - x^2 - 6 = 0$
 $M^2 - M - 6 = 0$ M の式が分かりにくければ $x^2 - x - 6$ と思ってよい
 $(M - 3)(M + 2) = 0$ 因数分解
 $(x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$ 元に戻す
 $x^2 - 3 = 0$ または $x^2 + 2 = 0$
 $x^2 = 3$ または $x^2 = -2$
 $x = \pm\sqrt{3}$ または $x = \pm\sqrt{-2}$
 $x = \pm\sqrt{3}$ または $x = \pm\sqrt{2}i$
 まとめると $x = \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}i$ 答

3 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^4 - 4x^2 = 0$ (2) $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$