数学Ⅱ　改訂版プリント＃ 12 （その 4）

年　組　号

氏名

■ 不等式の証明

☆ $\geqq$ △　を証明するには　☆ $-$ △ $\geqq 0$　を示せばよい。

$\boxed{1}$ 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $x^2+9 \geqq 6x$　　(2) $x^2+y^2 \geqq 2xy$

☆ $>$ △　を証明するには　☆ $-$ △ > 0　を示せばよい。

$\boxed{2}$ 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $a>1$ のとき　$5a+2>3a+4$　　(2) $a>b$ のとき　$ab-9>(a+3)(b-3)$

■ 相加・相乗平均

正の実数 a, b について

$\dfrac{a+b}{2}$ を　a と b の**相加平均**（そうかへいきん）【たし算（**加**法）の平均】という。

$\sqrt{ab}$ を　a と b の**相乗平均**（そうじょうへいきん）《かけ算（**乗**法）の平均》という。

$\boxed{3}$ 次の数の相加平均・相乗平均をそれぞれ求めなさい。

(1) 3，27　　(2) 9，16

■相加平均と相乗平均

$a>0,\ b>0$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}}$　が成り立つ。

$\boxed{4}$ $a>0$ のとき $a+\dfrac{25}{a} \geqq 10$ を証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい。

$\boxed{5}$ $a>0,\ b>0$ のとき $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{4b} \geqq 1$ を証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい。

数学Ⅱ　改訂版プリント＃ 12 （その 4）　　年　組　号

氏名

■ 不等式の証明

☆ ≧ △　を証明するには　☆ − △ ≧ 0　を示せばよい。

1 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $x^2+9 \geqq 6x$　　(2) $x^2+y^2 \geqq 2xy$

(1)

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = (x^2+9)-6x = x^2-6x+9 = (x-3)^2 \geqq 0$$

(左辺) − (右辺) $\geqq 0$ となるから
$x^2+9 \geqq 6x$ が成り立つ。

(2)

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = (x^2+y^2)-2xy = x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2 \geqq 0$$

(左辺) − (右辺) $\geqq 0$ となるから
$x^2+y^2 \geqq 2xy$ が成り立つ。

☆ > △　を証明するには　☆ − △ > 0　を示せばよい。

2 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $a>1$ のとき　$5a+2>3a+4$　　(2) $a>b$ のとき　$ab-9>(a+3)(b-3)$

(1)

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = (5a+2)-(3a+4) = 2a-2 = 2(a-1)$$

$a>1$ のときは $2(a-1)>0$ となるから
$a>1$ のとき $5a+2>3a+4$ が成り立つ。

(2)

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = (ab-9)-(a+3)(b-3) = ab-9-(ab-3a+3b-9) = ab-9-ab+3a-3b+9 = 3a-3b = 3(a-b)$$

$a>b$ のときは $3(a-b)>0$ となるから
$a>b$ のとき $ab-9>(a+3)(b-3)$ が成り立つ。

■ 相加・相乗平均

正の実数 a, b について

$\dfrac{a+b}{2}$　を　a と b の**相加平均**(そうかへいきん)　【たし算（加法）の平均】　という。

$\sqrt{ab}$　を　a と b の**相乗平均**(そうじょうへいきん)　《かけ算（乗法）の平均》　という。

3 次の数の相加平均・相乗平均をそれぞれ求めなさい。

(1) 3，27　　**15，9**　　(2) 9，16　　**12.5，12**

■相加平均と相乗平均

$a>0,\ b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　が成り立つ。

4 $a>0$ のとき $a+\dfrac{25}{a} \geqq 10$ を証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい。

$a>0$ のときは $\frac{25}{a}>0$ なので相加相乗平均の関係より

$$\frac{a+\frac{25}{a}}{2} \geqq \sqrt{a \times \frac{25}{a}}$$

$$\frac{a+\frac{25}{a}}{2} \geqq \sqrt{25}$$

$$\frac{a+\frac{25}{a}}{2} \geqq 5$$

$$\left(\frac{a+\frac{25}{a}}{2}\right) \times 2 \geqq 5 \times 2$$

$$a+\frac{25}{a} \geqq 10$$

等号が成り立つのは $a=\frac{25}{a}$ のときなので
$a^2=25$ となって $a=\pm 5$ だが、問題に
$a>0$ と書いてあるので適するのは $a=5$

5 $a>0,\ b>0$ のとき $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{4b} \geqq 1$ を証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい。

$a>0,\ b>0$ のときは $\frac{b}{a}>0,\ \frac{a}{4b}>0$
なので相加相乗平均の関係より

$$\frac{\frac{b}{a}+\frac{a}{4b}}{2} \geqq \sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{4b}}$$

$$\frac{\frac{b}{a}+\frac{a}{4b}}{2} \geqq \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\frac{b}{a}+\frac{a}{4b}}{2} \geqq \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\frac{b}{a}+\frac{a}{4b}}{2}\right) \times 2 \geqq \frac{1}{2} \times 2$$

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{4b} \geqq 1$$

等号が成り立つのは $\frac{b}{a}=\frac{a}{4b}$ のときなので
$a^2=4b^2$ となって $a=\pm 2b$ だが、問題に
$a>0,\ b>0$ と書いてあるので適するのは
$a=2b$