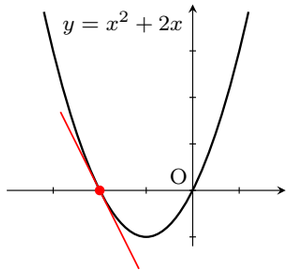
数学Ⅱ　改訂版プリント＃ 48

年　　組　　号

氏名

■ 接線の傾き

曲線をかすめる直線を**接線**という。曲線と接線のかする点を**接点**という。
微分を使うと**接線の傾き**が計算できる。

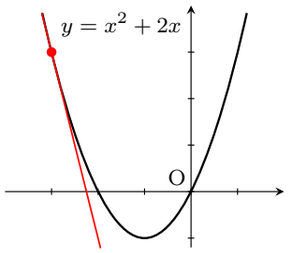


例題 1　$y = x^2 + 2x$ のときは $y' = 2x + 2$ になるので **$x = -2$ のときの接線の傾き**は y' に $x = -2$ を代入して

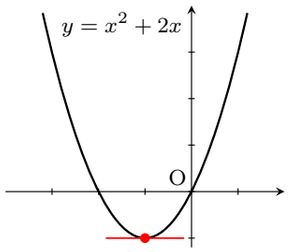
$$y' = 2 \times (-2) + 2 = \mathbf{-2} \qquad \text{になる。}$$

1　$y = x^2 + 2x$ のグラフ上の、次の点における接線の傾きを求めなさい。

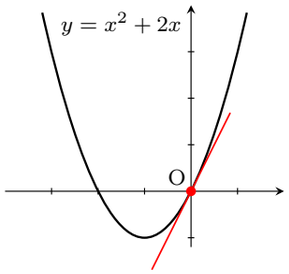
(1)　$x = -3$



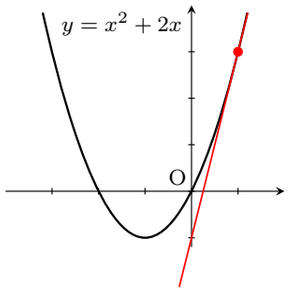
(2)　$x = -1$



(3)　$x = 0$



(4)　$x = 1$



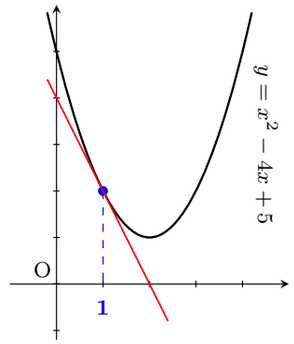
■ 接線の方程式

以前、**通る点と傾きが分かったときの直線の方程式**を学んだ。

> $(\bigcirc, \triangle)$ を通り、傾きが□の直線の方程式は
>
> $$y - \triangle = \square\,(x - \bigcirc)$$
>
> 言葉で書くと　$y - \underset{y\text{ 座標}}{\text{通る点の}} = \textbf{傾き}\left(x - \underset{x\text{ 座標}}{\text{通る点の}}\right)$

微分すると傾きが分かるので、グラフ上の点における接線を求めることができる。

例題 2　$y = x^2 - 4x + 5$ 上の、$x = 1$ の点の接線を求めたい。
$x = 1$ を $y = x^2 - 4x + 5$ に代入すると



$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 5 \\ &= 1^2 - 4 \times 1 + 5 \\ &= 1 - 4 + 5 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となるのでグラフ上の点 $(1, 2)$ を通ることが分かる。

また $y' = 2x - 4$ となるので $x = 1$ のときの接線の傾きは y' に $x = 1$ を代入して $y' = 2 \times 1 - 4 = -2$ となる。

よって通る点が $(1, 2)$ で、傾きが -2 の直線の方程式は

$$\begin{aligned} y - 2 &= -2\,(x - 1) \\ y - 2 &= -2x + 2 \\ y &= -2x + 4 \qquad \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$

2　次の関数のグラフ上の点の接線を求めなさい。

(1)　$y = x^2$,　$x = -1$ のとき

(2)　$y = -2x^2$,　$x = 3$ のとき

(3)　$y = 2x^2 + 5x$,　$x = 1$ のとき

(4)　$y = -3x^2 - 2x + 7$,　$x = -2$ のとき

改訂版プリント＃49 1 (1) ↗ $(-1, 2)$ ↘ $(1, -2)$ ↗　(2) ↘ $(-2, 0)$ ↗ $(0, 4)$ ↘　(3) ↗ $(0, -3)$ ↗ (4) ↘ $(-2, -15)$ ↗ $(2, 17)$ ↘　(5) ↘ $(1, -5)$ ↗ $(2, -4)$ ↘

数学Ⅱ　改訂版プリント＃ 49

年　　組　　号

氏名

■ 関数の増減表・極大値と極小値

※注　$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{f(x)}$ は同じものだと思ってよい。同様に $\boldsymbol{y'}$ と $\boldsymbol{f'(x)}$ は同じものだと思ってよい。

$y' > 0$ のときは 傾き > 0 ということなので、**$\boldsymbol{y}$ のグラフは右上がり**になる。
$y' < 0$ のときは 傾き < 0 ということなので、**$\boldsymbol{y}$ のグラフは右下がり**になる。

だから y' を計算して「右上がり/右下がり」を調べれば**グラフを描くことができる。**

例題 1　$y = x^3 - 3x^2 + 4$ の増減表をつくりグラフを描きなさい。

解　微分すると $y' = 3x^2 - 6x$ となる。$y' = 0$ を計算すると

$$3x^2 - 6x = 0$$
$$3x(x-2) = 0$$
$$x = 0,\ 2$$

x	$\cdots$	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\mathbf{2}$	$\cdots$
y'		$\mathbf{0}$		$\mathbf{0}$	
y					

$x < 0,\quad 0 < x < 2,\quad 2 < x$ のとき y' が $+, -$ どちらになるか調べると

[例えば $x < 0$ ならば $x = -1$ を y' に代入して $+, -$ どちらになるか調べる。
$0 < x < 2$ ならば $x = 1$ を y' に代入して $+, -$ どちらになるか調べる。]

$x < 0$ のときは $+$ で、$0 < x < 2$ のときは $-$ で、$< x$ のときは $+$ になるので

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

y' が $+$ のときは **$\boldsymbol{y}$ のグラフは右上がり**で、y' が $-$ のときは **$\boldsymbol{y}$ のグラフは右下がり**なので

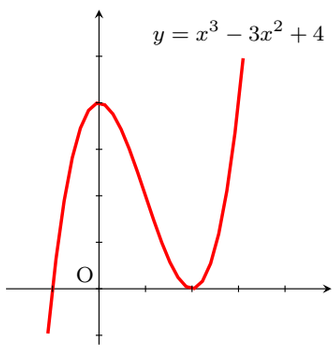
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x = \mathbf{0},\ \mathbf{2}$ のときの y の値を計算すると

$y = \mathbf{0}^3 - 3 \times \mathbf{0}^2 + 4 = \mathbf{4}$
$y = \mathbf{2}^3 - 3 \times \mathbf{2}^2 + 4 = \mathbf{0}$ となるので

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\mathbf{4}$	$\searrow$	$\mathbf{0}$	$\nearrow$

よってグラフは



グラフを描いたとき、山のてっぺんを**極大**、谷底を**極小**という。そのときの値を**極大値**、**極小値**という。

1　次の関数の増減表をつくりグラフを描きなさい。

(1)　$y = x^3 - 3x$

(2)　$y = -x^3 - 3x^2 + 4$

(3)　$y = x^3 - 3$

(4)　$y = -x^3 + 12x + 1$

(5)　$y = -2x^3 + 9x^2 - 12x$

改訂版プリント#48 1 (1) -4 (2) 0 (3) 2 (4) 4 2 (1) $y = -2x - 1$ (2) $y = -12x + 18$ (3) $y = 9x - 2$ (4) $y = 10x + 19$