# 数学Ⅱ　改訂版プリント＃ 48

年　組　号

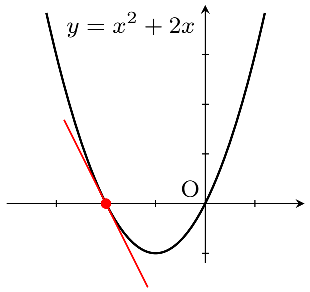
氏名

## ■ 接線の傾き

曲線をかすめる直線を**接線**という。曲線と接線のかする点を**接点**という。
微分を使うと**接線の傾き**が計算できる。

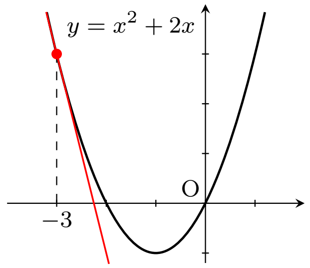
例題 1　$y = x^2 + 2x$ のときは $y' = 2x + 2$ になるので
**$x = -2$ のときの接線の傾き**は $y'$ に $x = -2$ を代入して

$$y' = 2 \times (-2) + 2 = \mathbf{-2} \quad \text{になる。}$$

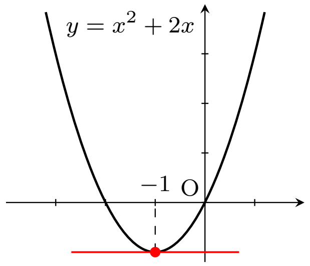



1　$y = x^2 + 2x$ のグラフ上の、次の点における接線の傾きを求めなさい。

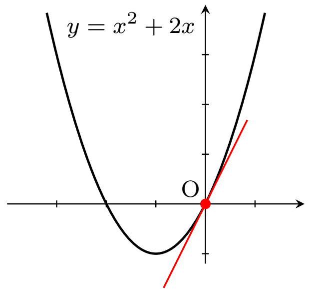
(1)　$x = -3$



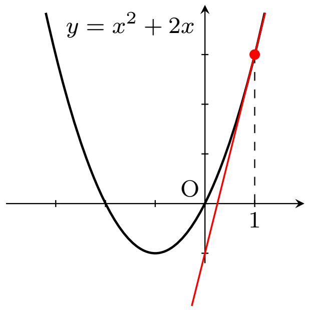

(2)　$x = -1$




(3)　$x = 0$




(4)　$x = 1$




## ■ 接線の方程式

以前、**1 点を通り、傾きが $m$ の直線（通る点と傾きが分かったときの直線の方程式）**を学んだ。

(○, △) を通り、傾きが□の直線の方程式は

$$y - \triangle = \square\,(x - \bigcirc)$$

言葉で書くと　$y -$ **通る点の $y$ 座標** $=$ **傾き** $\left( x - \right.$ **通る点の $x$ 座標** $\left. \right)$

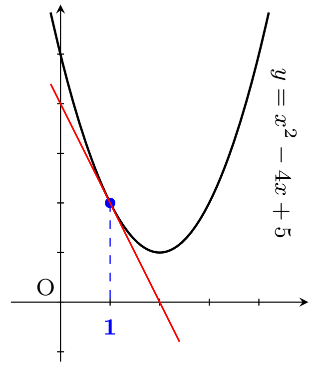
微分すると傾きが分かるので、グラフ上の点における接線を求めることができる。

例題 2　$y = x^2 - 4x + 5$ 上の点 $(1, 2)$ における接線を求めたい。

$y' = 2x - 4$ となるので $x = 1$ のときの接線の傾きは $y'$ に
$x = 1$ を代入して $y' = 2 \times 1 - 4 = -2$ となる。

よって通る点が $(1, 2)$ で、傾きが $-2$ の直線の方程式は

$$y - 2 = -2\,(x - 1)$$
$$y - 2 = -2x + 2$$
$$y = -2x + 4 \quad \text{答}$$




2　次の関数のグラフ上の点の接線を求めなさい。

(1)　$y = x^2$　　$(-1, 1)$

(2)　$y = -2x^2$　　$(3, -18)$

(3)　$y = 2x^2 + 5x$　　$(1, 7)$

(4)　$y = -3x^2 - 2x + 7$　　$(-2, -1)$

改訂版プリント#49 1 (1) ↗ $(-1, 2)$ ↘ $(1, -2)$ ↗ (2) ↘ $(-2, 0)$ ↗ $(0, 4)$ ↘ (3) ↗ $(0, -3)$ ↗ (4) ↘ $(-2, -15)$ ↗ $(2, 17)$ ↘ (5) ↘ $(1, -5)$ ↗ $(2, -4)$ ↘

数学Ⅱ　改訂版プリント＃ 49　　　　年　　組　　号

氏名

## ■ 関数の増減表・極大値と極小値

※注　$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{f(x)}$ は同じものだと思ってよい。
同様に $\boldsymbol{y'}$ と $\boldsymbol{f'(x)}$ は同じものだと思ってよい。

$y'>0$ のときは　傾き $>0$　なので、**$y$ のグラフは右上がり**になる。
$y'<0$ のときは　傾き $<0$　なので、**$y$ のグラフは右下がり**になる。

だから $y'$ を計算して「右上がり/右下がり」を調べれば**グラフを描くことができる。**

例題 1　$y=x^3-3x^2+4$ の増減表をつくりグラフを描きなさい。

解　微分すると $y'=3x^2-6x$ となる。$y'=0$ を計算すると

$$3x^2-6x=0$$
$$3x(x-2)=0$$
$$x=0,\ 2$$

| $x$ | $\cdots$ | **0** | $\cdots$ | **2** | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | **0** | | **0** | |
| $y$ | | | | | |

$x<0,\quad 0<x<2,\quad 2<x$ のとき $y'$ が $+,-$ どちらになるか調べると

［ 例えば $x<0$ ならば $x=-1$ を $y'$ に代入して $+,-$ どちらになるか調べる。
$0<x<2$ ならば $x=1$ を $y'$ に代入して $+,-$ どちらになるか調べる。］

$x<0$ のときは $+$ で、$0<x<2$ のときは $-$ で、$2<x$ のときは $+$ になるので

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | | | | | |

$y'$ が $+$ のときは **$y$ のグラフは右上がり**で、$y'$ が $-$ のときは **$y$ のグラフは右下がり**なので

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

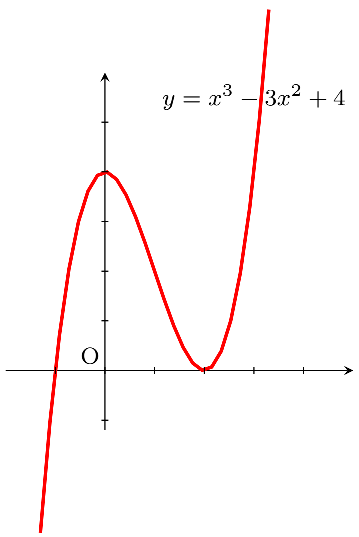
$x=\mathbf{0},\ \mathbf{2}$ のときの $y$ の値を計算すると

$y=\mathbf{0}^3-3\times\mathbf{0}^2+4=\mathbf{4}$

$y=\mathbf{2}^3-3\times\mathbf{2}^2+4=\mathbf{0}$ となるので

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | **4** | $\searrow$ | **0** | $\nearrow$ |

よってグラフは




グラフを描いたとき、山のてっぺんを**極大**、谷底を**極小**という。そのときの値を**極大値**、**極小値**という。

$\boxed{1}$ 次の関数の増減表をつくりグラフを描きなさい。

(1) $y=x^3-3x$　　(2) $y=-x^3-3x^2+4$

(3) $y=x^3-3$　　(4) $y=-x^3+12x+1$

(5) $y=-2x^3+9x^2-12x$

改訂版プリント#48 $\boxed{1}$ (1) $-4$ (2) 0 (3) 2 (4) 4 $\boxed{2}$ (1) $y=-2x-1$ (2) $y=-12x+18$ (3) $y=9x-2$ (4) $y=10x+19$

# 数学Ⅱ　改訂版プリント# 49

年　　組　　号

氏名

## ■ 関数の増減表・極大値と極小値

**※注**　$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{f(x)}$　は同じものだと思ってよい。
同様に $\boldsymbol{y'}$ と $\boldsymbol{f'(x)}$　は同じものだと思ってよい。

$y' > 0$ のときは　傾き $> 0$　なので、**$y$ のグラフは右上がり**になる。
$y' < 0$ のときは　傾き $< 0$　なので、**$y$ のグラフは右下がり**になる。

だから $y'$ を計算して「右上がり/右下がり」を調べれば**グラフを描くことができる。**

例題 1　$y = x^3 - 3x^2 + 4$ の増減表をつくりグラフを描きなさい。

解　微分すると $y' = 3x^2 - 6x$ となる。$y' = 0$ を計算すると

$$3x^2 - 6x = 0$$
$$3x(x-2) = 0$$
$$x = 0,\ 2$$

| $x$ | $\cdots$ | **0** | $\cdots$ | **2** | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | **0** | | **0** | |
| $y$ | | | | | |

$x < 0,\quad 0 < x < 2,\quad 2 < x$ のとき $y'$ が $+, -$ どちらになるか調べると

[ 例えば $x < 0$ ならば $x = -1$ を $y'$ に代入して $+, -$ どちらになるか調べる。
$0 < x < 2$ ならば $x = 1$ を $y'$ に代入して $+, -$ どちらになるか調べる。 ]

$x < 0$ のときは $+$ で、$0 < x < 2$ のときは $-$ で、$2 < x$ のときは $+$ になるので

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | | | | | |

$y'$ が $+$ のときは **$y$ のグラフは右上がり**で、$y'$ が $-$ のときは **$y$ のグラフは右下がり**なので

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

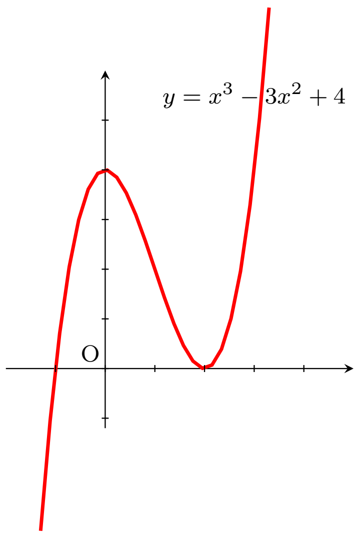
$x = \mathbf{0},\ \mathbf{2}$ のときの $y$ の値を計算すると

$y = \mathbf{0}^3 - 3 \times \mathbf{0}^2 + 4 = \mathbf{4}$

$y = \mathbf{2}^3 - 3 \times \mathbf{2}^2 + 4 = \mathbf{0}$ となるので

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | **4** | $\searrow$ | **0** | $\nearrow$ |

よってグラフは



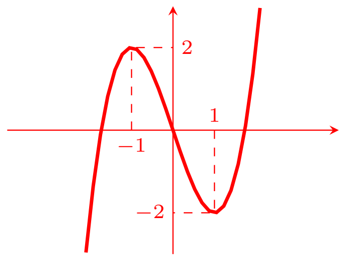

グラフを描いたとき、山のてっぺんを**極大**、谷底を**極小**という。そのときの値を**極大値**、**極小値**という。

1　次の関数の増減表をつくりグラフを描きなさい。

(1)　$y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3$ なので $y' = 0$ の解は
因数分解して $3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1) = 0$
だから $x = -1, 1$ になる

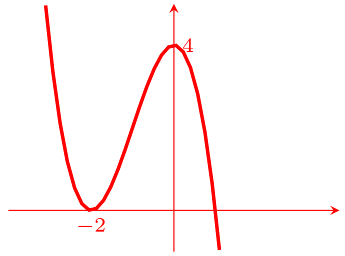
| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | 極大 2 | $\searrow$ | 極小 $-2$ | $\nearrow$ |




(2)　$y = -x^3 - 3x^2 + 4$

$y' = -3x^2 - 6x$ なので $y' = 0$ の解は
$-3x$ でくくって $-3x(x+2) = 0$ だから
$x = 0, -2$ になる

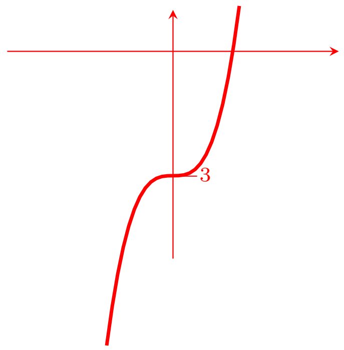
| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | 極小 0 | $\nearrow$ | 極大 4 | $\searrow$ |




(3)　$y = x^3 - 3$

$y' = 3x^2$ なので $y' = 0$ の解は
$3x^2 = 0$ を解いて $x = 0$ になる

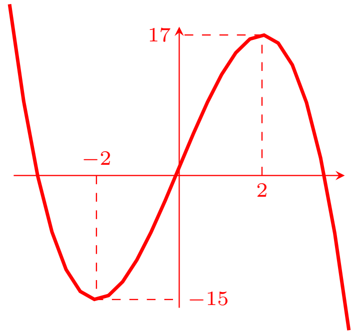
| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $-3$ | $\nearrow$ |




(4)　$y = -x^3 + 12x + 1$

$y' = -3x^2 + 12$ なので $y' = 0$ の解は
因数分解して
$-3(x^2 - 4) = -3(x+2)(x-2) = 0$ だから
$x = -2, 2$ になる

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | 極小 $-15$ | $\nearrow$ | 極大 17 | $\searrow$ |




**改訂#49** 1　(1) $\nearrow (-1, 2) \searrow (1, -2) \nearrow$　(2) $\searrow (-2, 0) \nearrow (0, 4) \searrow$　(3) $\nearrow (0, -3) \nearrow$ (4) $\searrow (-2, -15) \nearrow (2, 17) \searrow$

(5)　$y=-2x^3+9x^2-12x$

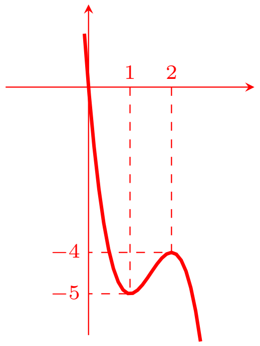
$y'=-6x^2+18x-12$ なので

$y'=0$ の解は因数分解して

$-6(x^2-3x+2)=-6(x-1)(x-2)=0$

だから $x=1,2$ になる

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | 極小<br>$-5$ | $\nearrow$ | 極大<br>$-4$ | $\searrow$ |




**改訂#49** (5) $\searrow (1,-5) \nearrow (2,-4) \searrow$