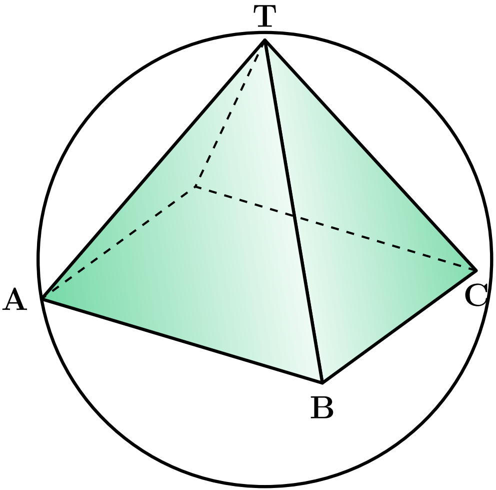
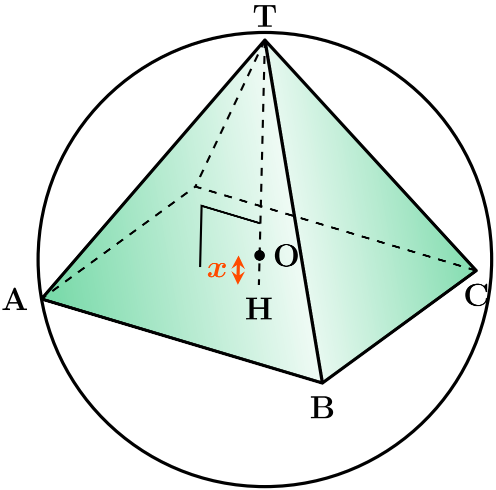
体積が最大となるのは？



半径 1 の球に内接し、底面が正方形の正四角錐のうち、体積が最大となるのはどのような正四角錐であるかを調べてみよう。

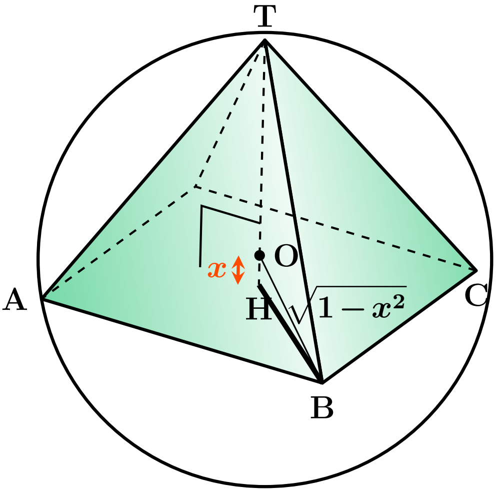
出典：104 数研, 数Ⅱ 709, p259

体積が最大となるのは？



球の中心を O、正四角錐の頂点から底面に降ろした垂線の足を H として、$\mathrm{OH} = x$ とする。

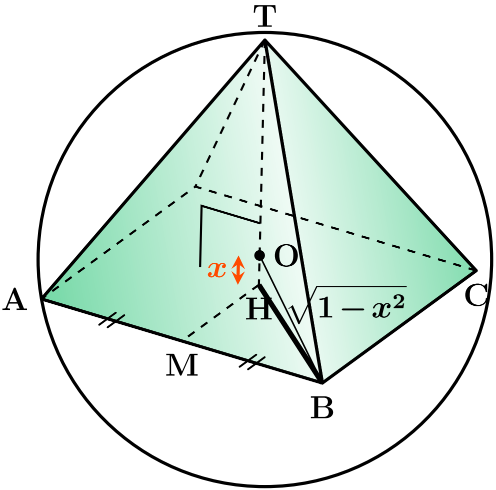
体積が最大となるのは？



B は球に接しているので OB は半径の 1 だから、直角三角形 OHB で三平方の定理を使って

$$\mathrm{HB} = \sqrt{1-x^2}$$

体積が最大となるのは？



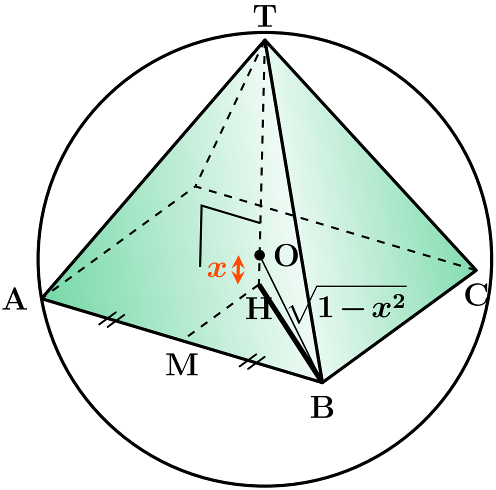
AB の中点を M とすると HM＝MB の直角二等辺三角形で三平方の定理を使って

$$\mathrm{HM}^2+\mathrm{MB}^2 = \sqrt{1-x^2}^{\,2}$$

$$2\,\mathrm{MB}^2 = 1-x^2$$

$$\mathrm{MB}^2 = \frac{1-x^2}{2}$$

体積が最大となるのは？



$$\mathrm{MB}^2 = \frac{1-x^2}{2}$$

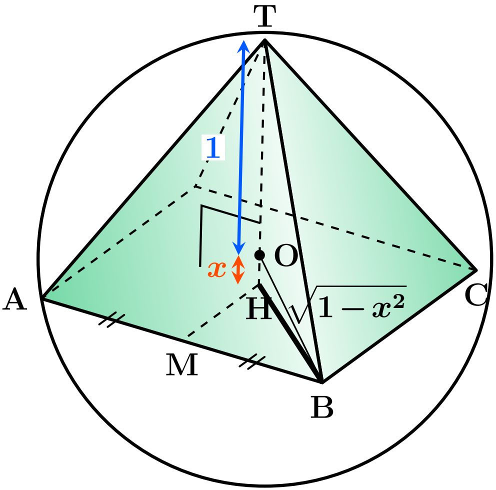
$$\mathrm{MB} = \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$$

よって $\mathrm{AB} = 2\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$ と

なって底面積は

$$\left(2\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right)^2$$

体積が最大となるのは？



$$\left(2\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right)^2 = 4\cdot\frac{1-x^2}{2}$$
$$= 2\left(1-x^2\right)$$

だから正四角錐の体積 V は

$$\frac{1}{3}\times 底面積 \times 高さ$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 2\left(1-x^2\right)\cdot\left(1+x\right)$$

体積が最大となるのは？

$V=\frac{2}{3}(1-x^2)(1+x)$ の最大値を調べる。

$f(x)=(1-x^2)(1+x)$ とすると展開して

$f(x)=-x^3-x^2+x+1$ なので、微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2-2x+1 \\ &= -(3x^2+2x-1) \\ &= -(3x-1)(x+1) \end{aligned}$$

$$f(x)=-x^3-x^2+x+1,\quad f'(x)=-(3x-1)(x+1)$$

$f'(x)=0$ とおいて $x=\dfrac{1}{3},\ -1$

$x=-1$ は不適で、$0 \leqq x \leqq 1$ で増減表をかくと

x	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0

$f(x)$ の最大値は $\frac{32}{27}$

元に戻って $V=\frac{2}{3}(1-x^2)(1+x)=\frac{2}{3}f(x)$ の最大値は

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{32}{27}=\frac{64}{81}\quad\left(x=\frac{1}{3}\text{のとき}\right)$$

答　底面が球の中心から下へ $\frac{1}{3}$ のとき

体積が $\frac{64}{81}$ で最大となる。