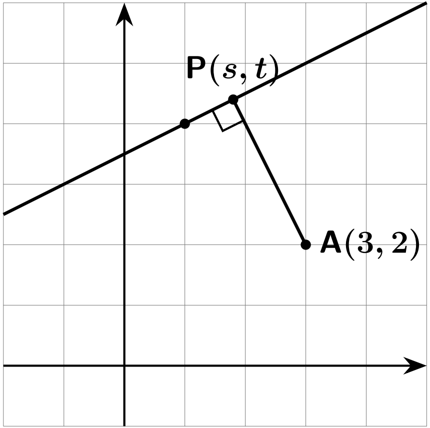
軌跡を求めなさい

a を定数とする。xy 平面上の点 $\mathrm{A}(3, 2)$ と直線 $\ell : x+(2a-1)y-8a+3=0$ に対し、A から ℓ に下ろした垂線を AP とする。ただし、ℓ が A を通る場合は $\mathrm{A}=\mathrm{P}$ とする。ℓ は a の値にかかわらず定点 $\boxed{}$ を通り、a が変化するとき P の軌跡は中心が $\boxed{}$ で半径が $\boxed{}$ の円（ただし、$\boxed{}$ を除く）となる。したがって、線分 AP の長さの最大値は $\boxed{}$ である。

通る定点　と　軌跡は

$\ell : x+(2a-1)y-8a+3=0$



ℓ を a について整理すると

$$
\begin{aligned}
x+(2a-1)y-8a+3 &= 0\\
x+2ay-y-8a+3 &= 0\\
(2y-8)a+(x-y+3) &= 0
\end{aligned}
$$

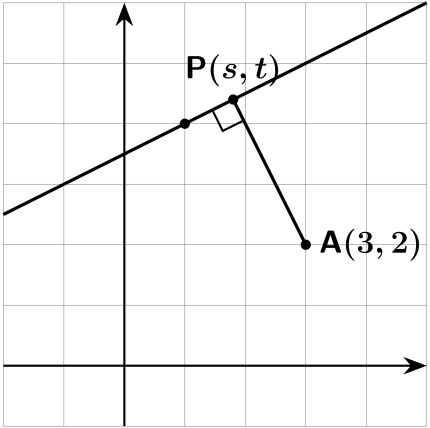
$2y-8=0,\ x-y+3=0$ を解いて

$y=4,\ x=1$

$\boxed{\text{答}}$　定点 $(1, 4)$ を通る

通る定点　と　軌跡は

$\ell : x+(2a-1)y-8a+3=0$



$x+(2a-1)y-8a+3=0$ を変形すると

$$\begin{aligned}(2a-1)y &= -x+8a-3\\ y &= \frac{-1}{2a-1}x+\frac{8a-3}{2a-1}\end{aligned}$$

より傾き $\dfrac{-1}{2a-1}$ $(2a-1 \neq 0)$ となる。

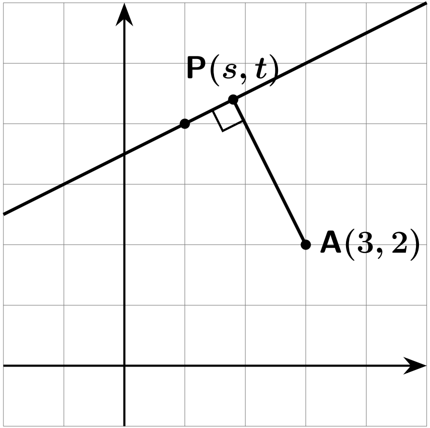
また P(s,t) とすると PA の傾きは

$\dfrac{t-2}{s-3}$ $(s-3 \neq 0)$ で、2 つの傾きは垂直な

ので $\dfrac{-1}{2a-1}\cdot\dfrac{t-2}{s-3}=-1$ となる。

通る定点　と　軌跡は

$\ell : x+(2a-1)y-8a+3=0$



$\dfrac{-1}{2a-1}\cdot\dfrac{t-2}{s-3}=-1$ を変形して

$$\begin{aligned}(2a-1)(s-3) &= t-2\\ 2a-1 &= \frac{t-2}{s-3} \quad \cdots ①\\ 2a &= \frac{t-2}{s-3}+1\\ &\times 4\\ 8a &= \frac{4(t-2)}{s-3}+4 \quad \cdots ②\end{aligned}$$

また P は ℓ 上にあるので

$s+(2a-1)t-8a+3=0$ で①②を代入

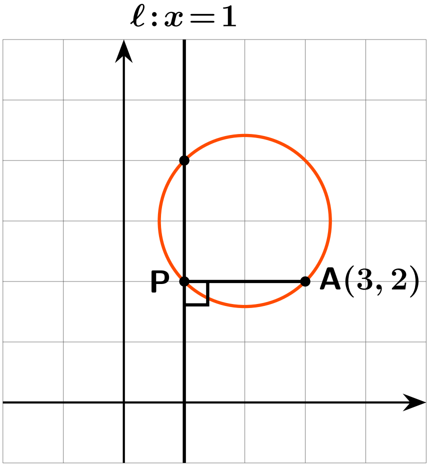
$s+(2a-1)t-8a+3=0 \qquad 2a-1=\frac{t-2}{s-3} \qquad 8a=\frac{4(t-2)}{s-3}+4$

$$
\begin{aligned}
s+\frac{t-2}{s-3}t-\left(\frac{4(t-2)}{s-3}+4\right)+3 &= 0\\
s+\frac{(t-2)t}{s-3}-\frac{4(t-2)}{s-3}-4+3 &= 0\\
s+\frac{t^2-2t}{s-3}-\frac{4t-8}{s-3}-1 &= 0\\
(s-3)s+t^2-2t-4t+8-(s-3) &= 0\\
s^2-3s+t^2-2t-4t+8-s+3 &= 0\\
s^2-4s+t^2-6t+11 &= 0\\
(s-2)^2-4+(t-3)^2-9+11 &= 0\\
(s-2)^2+(t-3)^2 &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(s-2)^2+(t-3)^2 &= 2 \\
(s-2)^2+(t-3)^2 &= \sqrt{2}^{\,2}
\end{aligned}
$$

答　中心 $(2,3)$, 半径 $\sqrt{2}$ の円

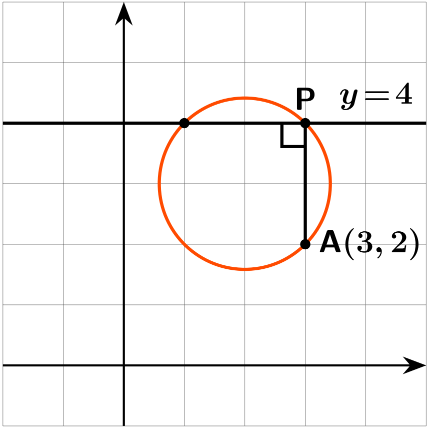
$2a-1=0$　と　$s-3=0$　を調べる



(i) $2a-1=0$ のとき $\left(a=\dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)$

$x+(2a-1)y-8a+3=0$ に代入すると $x=1$ となって $2a-1=0$ のときも点 P は中心 $(2,3)$, 半径 $\sqrt{2}$ の円上にある。

$2a-1=0$ と $s-3=0$ を調べる

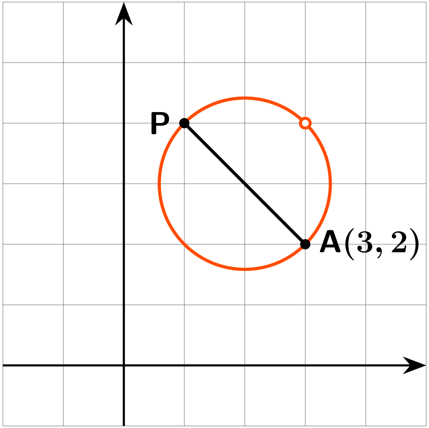


(ii) $s-3=0$ のとき (P の x 座標が 3)

$y=\dfrac{-1}{2a-1}x+\dfrac{8a-3}{2a-1}$ の傾きが 0 でなければならない。その場合は $\dfrac{-1}{2a-1}=0$ が必要となるが、このとき $-1=0$ となって矛盾が生じる。つまり傾きが 0 となることはない。

よって 答 $(3,4)$ は除く

$2a-1=0$　と　$s-3=0$　を調べる



(ii) $s-3=0$ のとき (P の x 座標が 3)

$y=\dfrac{-1}{2a-1}x+\dfrac{8a-3}{2a-1}$ の傾きが 0 でなければならない。その場合は $\dfrac{-1}{2a-1}=0$ が必要となるが、このとき $-1=0$ となって矛盾が生じる。つまり傾きが 0 となることはない。

よって　答 $(3, 4)$ は除く

線分 AP の最大値は、円の直径のときで

答　$2\sqrt{2}$