最小値を求めなさい

$x=t+\dfrac{1}{t}$ とする。$t>0$ のとき、$x\geqq 2$ であることを示せ。

また、関数 $y=t^2+\dfrac{1}{t^2}-2a\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。ただし、a は定数とする。

solution strategy

$\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2=t^2+2\cdot t\cdot\dfrac{1}{t}+\left(\dfrac{1}{t}\right)^2=t^2+2+\dfrac{1}{t^2}$ が使えそうだ。

また相加相乗平均も使えそうだ。

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

（ただし $a>0,\quad b>0$ ）

まず相加相乗平均で

$t>0$ のとき $\dfrac{1}{t}>0$ なので、相加相乗平均を使って

$$\frac{t+\dfrac{1}{t}}{2} \geqq \sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}$$

$$\frac{t+\dfrac{1}{t}}{2} \geqq 1$$

問題文に $x = t + \frac{1}{t}$ とかかれていた

$$\frac{t+\frac{1}{t}}{2} \geqq 1$$

$$t+\frac{1}{t} \geqq 2$$

$$x \geqq 2$$

【証明終】

$x=t+\frac{1}{t}$　$x \geqq 2$　$y=t^2+\frac{1}{t^2}-2a\left(t+\frac{1}{t}\right)$ の最小値？

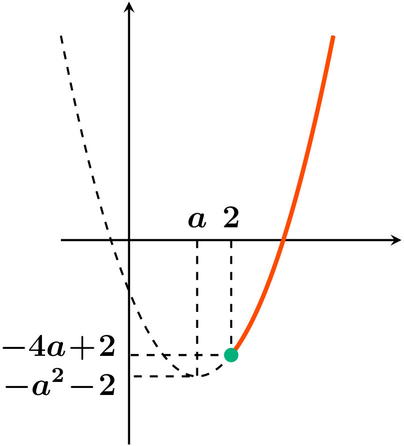
$$
\begin{aligned}
y &= t^2+\frac{1}{t^2} - 2a\left(t+\frac{1}{t}\right) \\
&= \left(t+\frac{1}{t}\right)^2 - 2 - 2a\left(t+\frac{1}{t}\right) \\
&= x^2 - 2 - 2a\cdot x \\
&= x^2 - 2ax - 2 \\
&= (x-a)^2 - a^2 - 2 \quad (x \geqq 2)
\end{aligned}
$$

【平方完成】

$y=(x-a)^2-a^2-2\quad(x\geqq 2)$ の最小値？

頂点は $(a,-a^2-2)$ となるが、$x=2$ を境目にして事情が異なるので　(i) $a<2$　と　(ii) $a\geqq 2$ で場合分け

$y=(x-a)^2-a^2-2 \quad (x \geqq 2)$ の最小値？

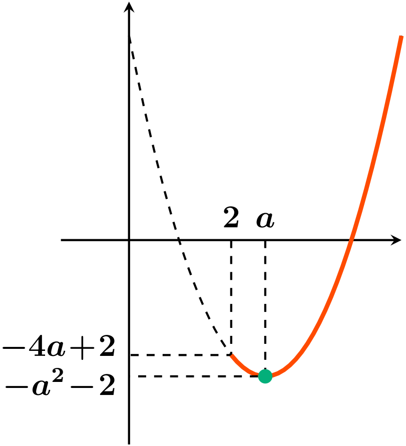


(i) $a<2$ のとき

最小値は $x=2$ のときで、そのときの値は $x=2$ を代入して

$$
\begin{aligned}
y &= (2-a)^2 -a^2-2 \\
&= 4-4a+a^2-a^2-2 \\
&= -4a+2
\end{aligned}
$$

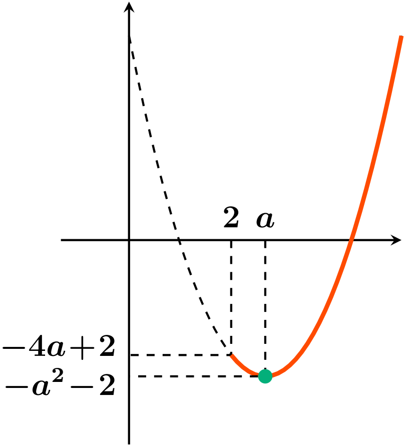
$y=(x-a)^2-a^2-2 \quad (x \geqq 2)$ の最小値？



(ii) $a \geqq 2$ のとき

最小値は $x=a$ のときで、そのときの値は $-a^2-2$

$y=(x-a)^2-a^2-2 \quad (x \geqq 2)$ の最小値？



(i) , (ii)より

$\boxed{\text{答}}$

$a<2$ のとき

最小値 $-4a+2 \ (x=2)$

$a \geqq 2$ のとき

最小値 $-a^2-2 \ (x=a)$