次の問いに答えなさい

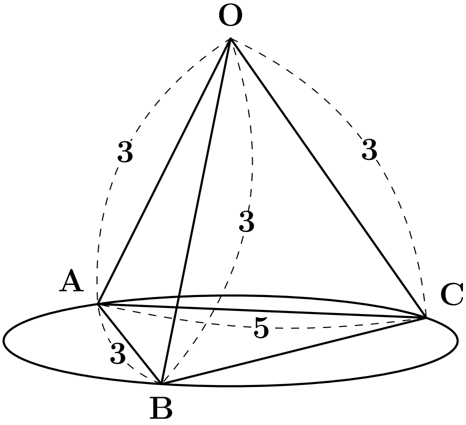
四面体 OABC において $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AC}=5$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{3}$ とする。

⑴ $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{}$ であり、$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の直径は $\boxed{}$ である。

⑵ $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を D とすると、$\mathrm{OD}=\boxed{}$ であり、四面体 OABC の体積は $\boxed{}$ である。

こんな図になる

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{3}\ \left(=\cos A\right)$$



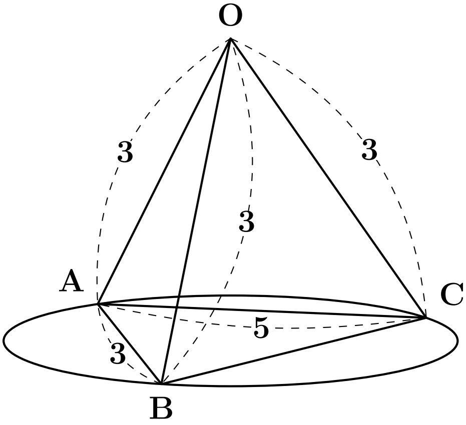
$\angle\mathrm{BAC}=A$ とすると、公式

$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A$ が使え

るので $\sin A$ を計算する

$\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos \angle \mathrm{BAC} = \frac{1}{3} \left(= \cos A \right)$



$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$
$$\sin^2 A + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2 A = 1 - \frac{1}{9}$$
$$\sin^2 A = \frac{8}{9}$$

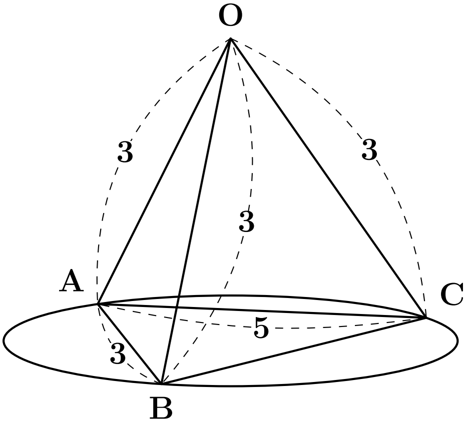
$\sin A > 0$ より（以下省略）

$$\sin A = \sqrt{\frac{8}{9}}$$
$$\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

一旦停止

$\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ S = 5\sqrt{2}$

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{3}\ \left(=\cos A\right)$$

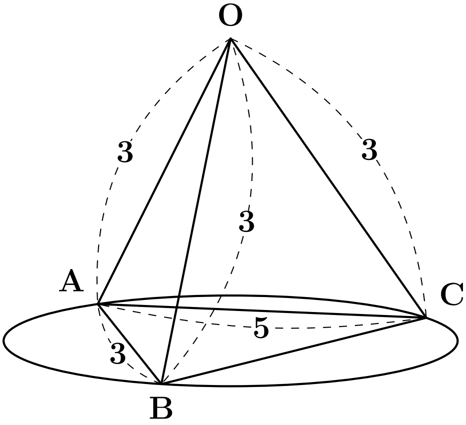


よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$ 答

$\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $S = 5\sqrt{2}$, $\mathrm{BC} = 2\sqrt{6}$

$\cos \angle \mathrm{BAC} = \frac{1}{3} \left(= \cos A \right)$



正弦定理 $\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$ を使いたいので BC を求めるために余弦定理を使う。

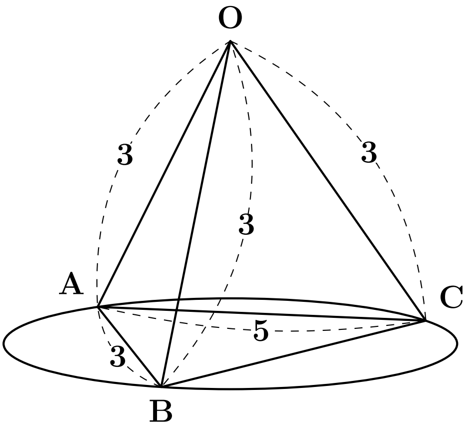
$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos A \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 24\end{aligned}$$

$$\mathrm{BC} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

一旦停止

$\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $S = 5\sqrt{2}$, $\mathrm{BC} = 2\sqrt{6}$, $2R = 3\sqrt{3}$

$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{3}\ \left(= \cos A \right)$



よって

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$$

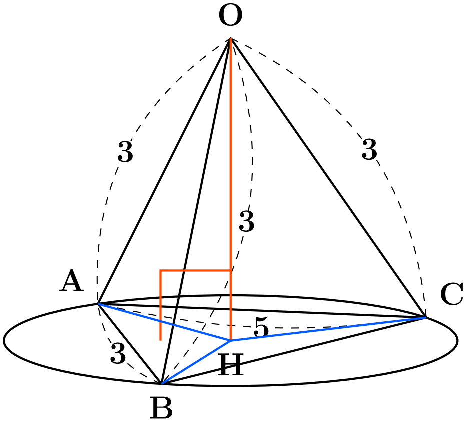
$$\frac{2\sqrt{6}}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} = 2R$$

$$\frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = 2R$$

答　$3\sqrt{3} = 2R$ (直径)

$\triangle ABC$ の面積 $S=5\sqrt{2}$, $2R=3\sqrt{3}$

$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}\quad\left(=\cos A\right)$

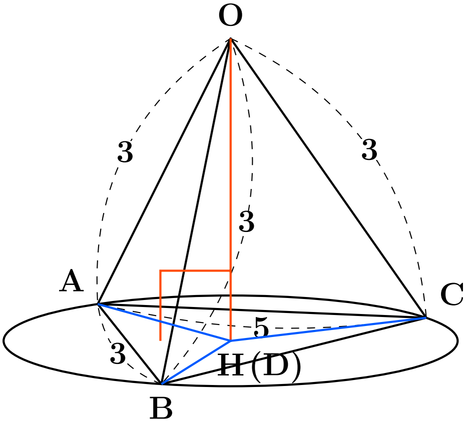


たぶん OD は四面体の高さだろうなと予想する。

O から垂線 OH を下ろして H と D が一致することを証明しよう。

△ABC の面積 $S=5\sqrt{2}$, $2R=3\sqrt{3}$

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{3}\ \left(=\cos A\right)$

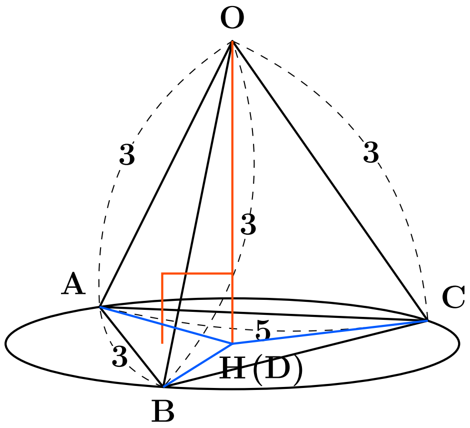


OH は共通で OA = OB = OC = 3 なので直角三角形の合同条件 web から △OAH ≡ △OBH ≡ △OCH

よって AH = BH = CH なので、点 H と点 D は一致する。

△ABC の面積 $S=5\sqrt{2}$, $2R=3\sqrt{3}$, $\mathrm{OD}=\frac{3}{2}$

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{3}\ \left(=\cos A\right)$



$\mathrm{AH}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (外接円の半径 R)

なので三平方の定理を使って

$$\mathrm{OD}^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=3^2$$

$$\mathrm{OD}^2+\frac{27}{4}=9$$

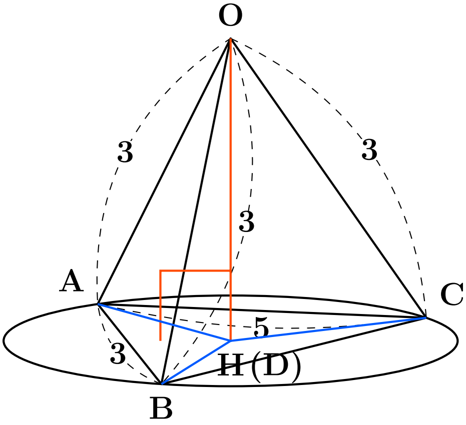
$$\mathrm{OD}^2=\frac{36}{4}-\frac{27}{4}$$

$$\mathrm{OD}^2=\frac{9}{4}$$

$$\mathrm{OD}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\ \boxed{答}$$

$\triangle$ABC の面積 $S=5\sqrt{2}$, $2R=3\sqrt{3}$, $\mathrm{OD}=\frac{3}{2}$

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{3}\ \left(=\cos A\right)$



よって

$$\begin{aligned}\text{体積}&=\frac{1}{3}\cdot\text{底面積}\cdot\text{高さ}\\&=\frac{1}{3}\cdot5\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\\&=\frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

答