

次の問いに答えなさい

a, b を定数とし、関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ は $x = -1$ で x 軸と交わるとする。

- (1) b を a の式で表せ。
- (2) $a > 0$ のとき、関数 $f(x)$ の極小値が負となるような a の値の範囲を求めよ。
- (3) (2)において、 $-1 \leq x \leq 2$ の範囲における $|f(x)|$ の最大値を a の式で表せ。

(1) b を a の式で表せ

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ が $x = -1$ で x 軸と交わるということは $f(-1) = 0$ ということなので

$$f(-1) = (-1)^3 - 3a \cdot (-1)^2 + b = 0$$

$$-1 - 3a + b = 0$$

$$b = 3a + 1 \quad \boxed{\text{答}}$$

(2) $a > 0$ のとき、関数 $f(x)$ の極小値が負

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a + 1$ より ($b = 3a + 1$ を代入)

$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$ なので

$f'(x) = 0$ とおくと $x = 0, 2a$ となる。

$a > 0$ より $2a > 0$ なので $x = 2a$ で極小値だ。

x	...	0	...	$2a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a + 1$ が $x = 2a$ で負の極小値

$$f(2a) = (2a)^3 - 3a \cdot (2a)^2 + 3a + 1 < 0$$

$$8a^3 - 12a^3 + 3a + 1 < 0$$

$$-4a^3 + 3a + 1 < 0$$

$a=1$ で 0 なので $a-1$ で割り切れる $4a^3 - 3a - 1 > 0$

$$(a-1)(4a^2 + 4a + 1) > 0$$

$$(a-1)(2a+1)^2 > 0$$

$(a-1)(2a+1)^2 > 0$ を計算

$(2a+1)^2 > 0$ より $a-1 > 0$ となって $a > 1$

これは問題にかかれていた条件 $a > 0$ を満たしているので OK

答 $a > 1$

(2)のとき $-1 \leq x \leq 2$ の $|f(x)|$ の最大値を a で

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a + 1$$

$a > 1$ なので $2a > 2$ となって増減表は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2a$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3a+1$	$\searrow$	$-9a+9$	$\nearrow$	

$a > 1$ より $3a+1 > 4$ なので $|f(0)| = 3a+1$ となる。

同様に $-9a+9 < 0$ なので

$|f(2)| = -(-9a+9) = 9a-9$ となる。

(2)のとき $-1 \leq x \leq 2$ の $|f(x)|$ の最大値を a で

よって $3a+1 \geq 9a-9$ のとき最大値 $3a+1$ で

$3a+1 < 9a-9$ のとき最大値 $9a-9$ となる。

$$3a+1 \geq 9a-9$$

$$-6a \geq -10$$

$$a \leq \frac{5}{3} \quad (\text{ただし } a > 1)$$

【答】 $1 < a \leq \frac{5}{3}$ のとき 最大値 $3a+1$

$a > \frac{5}{3}$ のとき 最大値 $9a-9$

グラフは

