チョコレートとキャンディーとクッキーが 1 つずつ乗った皿が 5 枚ある。各々の皿からこれらの菓子を無作為に 1 つ取り、計 5 個の菓子をあらかじめ用意した袋に詰める。

⑴ 袋にチョコレートが 1 つ、キャンディーとクッキーが各 2 つ入っている確率を求めよ。

⑵ 袋にクッキーが入っていない確率を求めよ。

⑶ 袋に入っているクッキーの枚数の期待値を求めよ。

(1)　チョコ 1 つ、キャンディーとクッキー各 2 つの確率？

すべての取り方は 3^5 通り　一旦停止

5 皿のうち 1 皿からチョコを取り、
残りの 4 皿のうち 2 皿からキャンディーを取り、
残りの 2 皿からはクッキーを取ればよいので

$$\frac{{}_5C_1 \times {}_4C_2\,(\times {}_2C_2)}{3^5} = \frac{\frac{5}{1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{3^5} = \frac{5\cdot 2\cdot 3}{3^5} = \frac{10}{81}$$ 答

⑵　袋にクッキーが入っていない確率？

1 つの皿からクッキーを取る確率は $\dfrac{1}{3}$ 一旦停止

チョコまたはキャンディーを取る確率は $\dfrac{2}{3}$ 一旦停止

よって 5 つの皿すべてからチョコまたはキャンディーを取ればよいので

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$ 答

⑶　袋に入っているクッキーの枚数の期待値？

枚	0	1	2	3	4	5	計
確率							1

クッキー $\frac{1}{3}$, チョコまたはキャンディー $\frac{2}{3}$

枚	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{32}{243}$						1

(i) クッキーが 0 枚のとき

さっき計算したので $\frac{32}{243}$

クッキー $\frac{1}{3}$, チョコまたはキャンディー $\frac{2}{3}$

枚	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$					1

(ii) クッキーが 1 枚のとき

1 皿からクッキーを取って 4 皿からチョコまたはキャンディーを取ればよい。またこのような取り方は ${}_5\mathrm{C}_1$ 通りあるので ${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

クッキー $\frac{1}{3}$, チョコまたはキャンディー $\frac{2}{3}$

枚	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$				1

(iii) クッキーが 2 枚のとき

2 皿からクッキーを取って 3 皿からチョコまたはキャンディーを取ればよい。またこのような取り方は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りあるので ${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$

クッキー $\frac{1}{3}$, チョコまたはキャンディー $\frac{2}{3}$

枚	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$			1

(iv) クッキーが 3 枚のとき

3 皿からクッキーを取って 2 皿からチョコまたはキャンディーを取ればよい。またこのような取り方は ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りあるので ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$

クッキー $\frac{1}{3}$, チョコまたはキャンディー $\frac{2}{3}$

枚	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$		1

(v) クッキーが 4 枚のとき

4 皿からクッキーを取って 1 皿からチョコまたはキャンディーを取ればよい。またこのような取り方は ${}_5C_4$ 通りあるので ${}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{243}$

クッキー $\frac{1}{3}$, チョコまたはキャンディー $\frac{2}{3}$

枚	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$	1

(vi) クッキーが 5 枚のとき

5 皿からクッキーを取ればよい。またこのような取り方は ${}_5\mathrm{C}_5$ 通りあるので ${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

クッキー $\frac{1}{3}$, チョコまたはキャンディー $\frac{2}{3}$

枚	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$	1

よって

$$0\cdot\frac{32}{243}+1\cdot\frac{80}{243}+2\cdot\frac{80}{243}+3\cdot\frac{40}{243}+4\cdot\frac{10}{243}+5\cdot\frac{1}{243}$$

$$=\frac{80+160+120+40+5}{243}=\frac{405}{243}=\frac{5}{3}\text{(枚)}$$ 答

これじゃダメ？

1 つの皿からクッキーを取る確率は $\dfrac{1}{3}$ なので

1 つの皿から取るクッキーの枚数の期待値は

$\dfrac{1}{3}$(枚) となる。

よって 5 つの皿から取ったクッキーの個数の期待値は

$$5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}(\text{枚}) \quad \boxed{\text{答}}$$