$\triangle$OAB において，OA $=2$，OB $=1$，$\angle$AOB $=60^\circ$

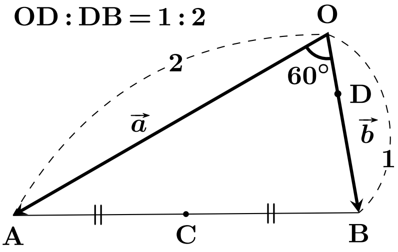
であり，線分 AB の中点を C，線分 OB を $1:2$ に内分する点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の各問いに答えよ。

⑴ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

⑶ 直線 CD 上に BE$\perp$CD となる点 E をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

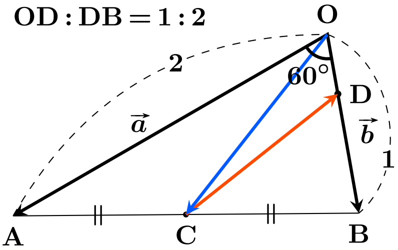
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ



内積の公式より

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= 2\cdot 1\cos 60^\circ \\ &= 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} \quad = 1 \quad \boxed{答}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ

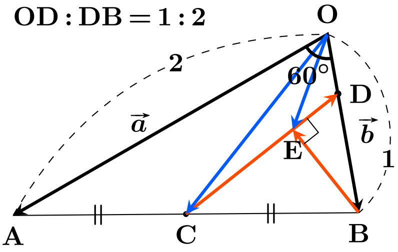


$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\vec{b}$$ より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\
&= \frac{1}{3}\vec{b} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\
&= \frac{2}{6}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{6}\vec{b} \\
&= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}
\end{aligned}$$ 答

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$



$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$ とおいて

$$= \frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{t}{2}\vec{a}-\frac{t}{6}\vec{b}$$

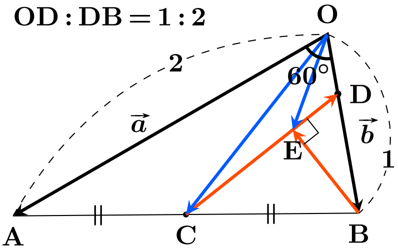
$$= \frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{3-t}{6}\vec{b}$$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$= \frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{3-t}{6}\vec{b}-\vec{b}$$

$$= \frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{3-t}{6}\vec{b}-\frac{6}{6}\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$



$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \frac{1-t}{2}\vec{a} + \frac{3-t}{6}\vec{b} - \frac{6}{6}\vec{b}$$

$$= \frac{1-t}{2}\vec{a} + \frac{3-t-6}{6}\vec{b}$$

$$= \frac{1-t}{2}\vec{a} - \frac{3+t}{6}\vec{b}$$

BE⊥CD より $\overrightarrow{\mathrm{BE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ なので

$\left(\frac{1-t}{2}\vec{a} - \frac{3+t}{6}\vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}\right) = 0$ を解けばよい

計算ミスしないように丁寧に計算する

$$\left(\frac{1-t}{2}\vec{a}-\frac{3+t}{6}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{t-1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{t-1}{12}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{t+3}{12}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{3+t}{36}|\vec{b}|^2$$

$|\vec{a}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1,\ |\vec{a}|=1$ より

$$=\frac{t-1}{4}\cdot 2^2+\frac{t-1}{12}\cdot 1+\frac{t+3}{12}\cdot 1+\frac{3+t}{36}\cdot 1^2$$

$$=\frac{36t-36+3t-3+3t+9+3+t}{36}$$

$$=\frac{43t-27}{36}=0$$ を解いて $t=\dfrac{27}{43}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1-t}{2}\vec{a} + \frac{3-t}{6}\vec{b}, \quad t = \frac{27}{43}$$

代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \frac{1-\frac{27}{43}}{2}\vec{a} + \frac{3-\frac{27}{43}}{6}\vec{b} \\ &= \frac{43-27}{2\times 43}\vec{a} + \frac{3\times 43-27}{6\times 43}\vec{b} \\ &= \frac{16}{2\times 43}\vec{a} + \frac{102}{6\times 43}\vec{b} \\ &= \frac{8}{43}\vec{a} + \frac{17}{43}\vec{b}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{答}}$