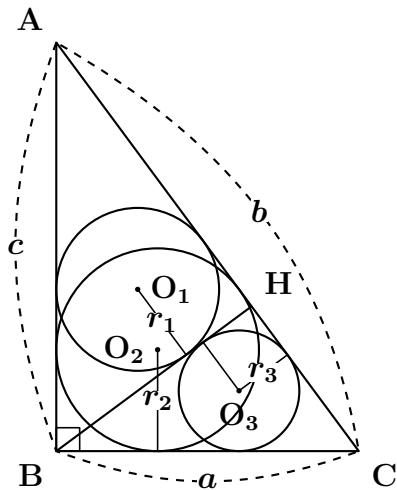


算額について知ろう

$\angle B$ が直角である直角三角形 ABC の頂点 B から AC に垂線をひき、 AC との交点を H とする。このとき、直角三角形 ABH, ABC, BCH の内接円の中心を O_1, O_2, O_3 として、その半径を r_1, r_2, r_3 とすると

$$r_1 + r_2 + r_3 = BH$$

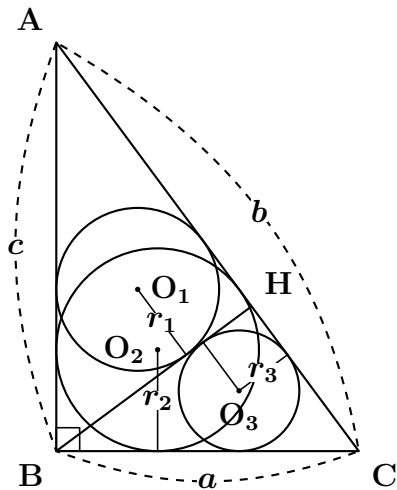
が成り立つことを示しなさい。



算額について知ろう

次の順に示します

- $\triangle ABH \sim \triangle ACB \sim \triangle BCH$
- $r_1 = (r_3 \text{ の式 })$ で表す
- $r_2 = (r_3 \text{ の式 })$ で表す
- $r_3 = (a, b, c \text{ の式 })$ で表す
- $r_1 + r_2 + r_3 = BH$ を示す



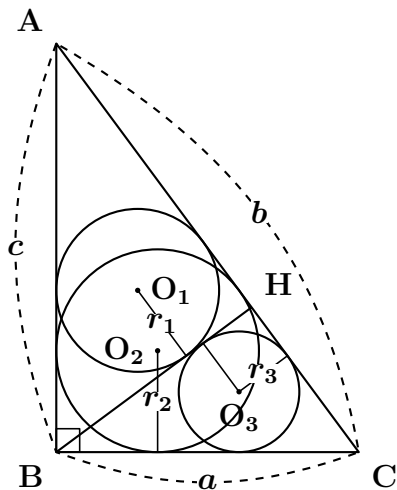
算額について知ろう

$$\angle AHB = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\angle BAH = \angle CAB \text{ (共通)}$$

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABH \sim \triangle ACB$$



算額について知ろう

$$\angle ABC = \angle BHC = 90^\circ$$

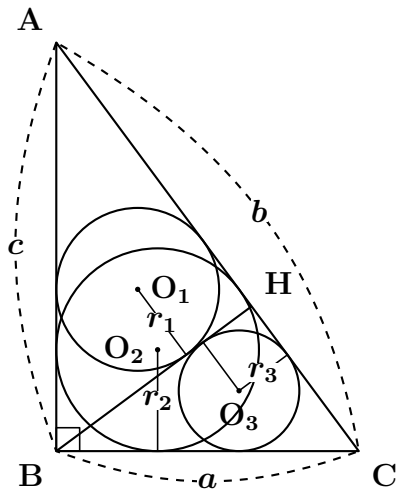
$$\angle ACB = \angle BCH \text{ (共通)}$$

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACB \sim \triangle BCH \quad \text{一旦停止}$$

さっきの結果と合体させて

$$\triangle ABH \sim \triangle ACB \sim \triangle BCH \quad \text{一旦停止}$$

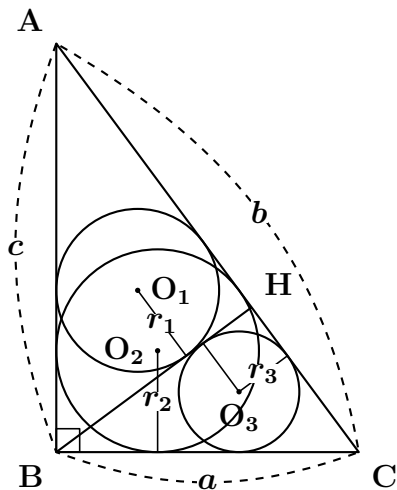


算額について知ろう

$\triangle ABH \sim \triangle BCH$ より

$c : a = r_1 : r_3$ なので
 $ar_1 = cr_3$ となって

$$r_1 = \frac{c}{a} r_3$$

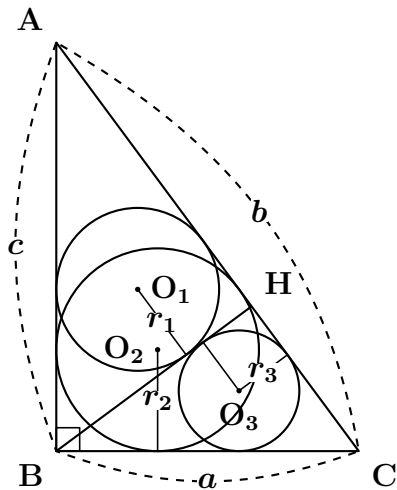


算額について知ろう

$\triangle BCH \sim \triangle ACB$ より

$a : b = r_3 : r_2$ なので
 $ar_2 = br_3$ となって

$$r_2 = \frac{b}{a} r_3$$



算額について知ろう

$$BH = \frac{ac}{b}$$

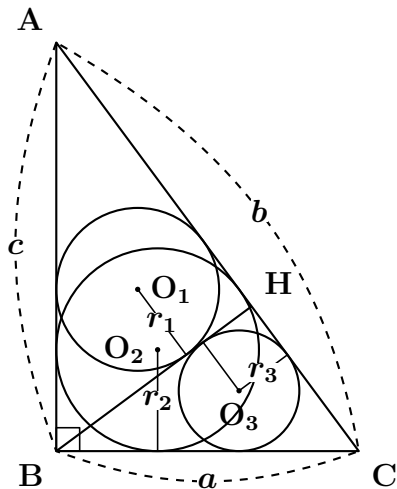
$\triangle ABH \sim \triangle ACB$ より

$c : b = BH : a$ なので
 $b \times BH = ac$ となって

$$BH = \frac{ac}{b}$$



(後で使う)



算額について知ろう

$$BH = \frac{ac}{b}$$

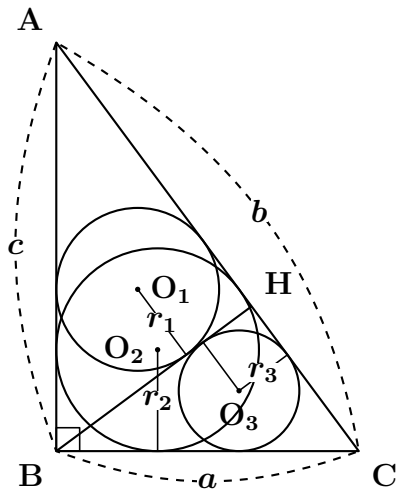
$\triangle BCH \sim \triangle ABH$ より

$a : c = CH : BH$ で

$a : c = CH : \frac{ac}{b}$ だから

$c \times CH = \frac{a^2 c}{b}$ となって

$$CH = \frac{a^2}{b}$$



算額について知ろう

$$BH = \frac{ac}{b}$$

$\triangle BCH$ の辺の長さの合計は

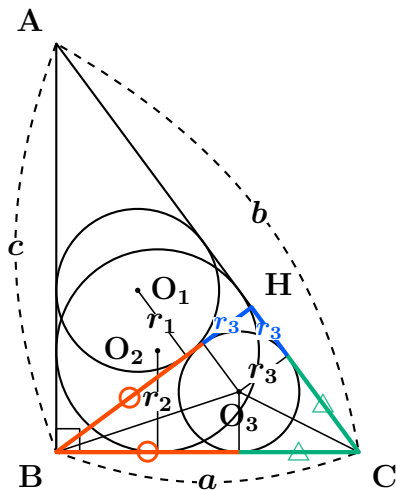
$$2a + 2r_3$$

また別の表し方では

$BC + CH + HB$ なので、さっき計算した式を代入すると

$$a + \frac{a^2}{b} + \frac{ac}{b}$$

で、これらは等しいので



$$2a + 2r_3 = a + \frac{a^2}{b} + \frac{ac}{b}$$

$$2a + 2r_3 = \frac{ab + a^2 + ac}{b}$$

$$2r_3 = \frac{ab + a^2 + ac}{b} - 2a$$

$$2r_3 = \frac{ab + a^2 + ac - 2ab}{b}$$

算額について知ろう

$$BH = \frac{ac}{b}$$

$$2r_3 = \frac{ab + a^2 + ac - 2ab}{b}$$

$$2r_3 = \frac{a^2 + ac - ab}{b}$$

$$r_3 = \frac{a^2 + ac - ab}{2b}$$



これらを $r_1 + r_2 + r_3$ に代入すると

算額について知ろう

$$BH = \frac{ac}{b}$$

$$\begin{aligned}r_1 + r_2 + r_3 &= \frac{c}{a} r_3 + \frac{b}{a} r_3 + r_3 \\&= \frac{c+b+a}{a} r_3 \\&= \frac{c+b+a}{a} \times \frac{a^2 + ac - ab}{2b} \\&= \frac{(c+b+a)(a^2 + ac - ab)}{2ab}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(c+b+a)(a^2+ac-ab)}{2ab} \\ &= \frac{(c+b+a)a(a+c-b)}{2ab} \\ &= \frac{(c+b+a)(a+c-b)}{2b} \\ &= \frac{\left((a+c)+b\right)\left((a+c)-b\right)}{2b} \end{aligned}$$

算額について知ろう

$$BH = \frac{ac}{b}$$

$$= \frac{\left((a+c) + b \right) \left((a+c) - b \right)}{2b}$$

$$= \frac{(a+c)^2 - b^2}{2b}$$

↑ 公式 $(\heartsuit + \spadesuit)(\heartsuit - \spadesuit) = \heartsuit^2 - \spadesuit^2$

$$= \frac{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}{2b}$$



$\triangle ABC$ は直角三角形なので、三平方の定理より
 $a^2 + c^2 = b^2$ が成り立つので

算額について知ろう

$$\text{BH} = \frac{ac}{b}$$

$$\begin{aligned}r_1 + r_2 + r_3 &= \frac{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}{2b} \\ &= \frac{2ac + b^2 - b^2}{2b} \\ &= \frac{2ac}{2b} = \frac{ac}{b} = \text{BH} \quad \text{【証明終わり】}\end{aligned}$$