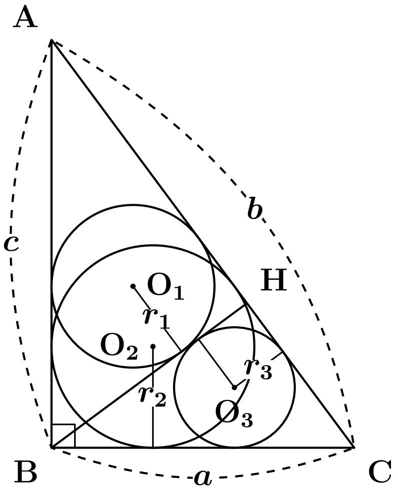
算額について知ろう

$\angle$B が直角である直角三角形 ABC の頂点 B から AC に垂線をひき、AC との交点を H とする。このとき、直角三角形 ABH,ABC,BCH の内接円の中心を O_1, O_2, O_3 として、その半径を r_1, r_2, r_3 とすると

$$r_1 + r_2 + r_3 = \mathrm{BH}$$

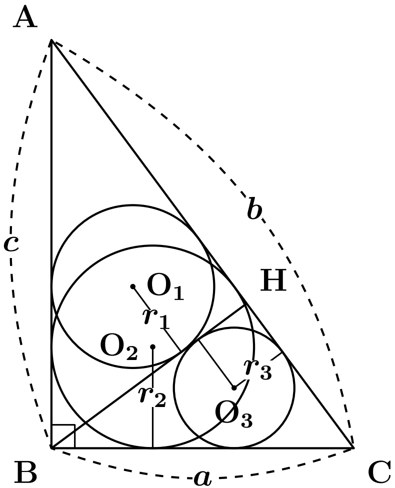
が成り立つことを示しなさい。



算額について知ろう

次の順に示します

- $\triangle \mathrm{ABH} \backsim \triangle \mathrm{ACB} \backsim \triangle \mathrm{BCH}$
- $r_1 = (\, r_3$ の式 $)$ で表す
- $r_2 = (\, r_3$ の式 $)$ で表す
- $r_3 = (\, a, b, c$ の式 $)$ で表す
- $r_1 + r_2 + r_3 = \mathrm{BH}$ を示す



算額について知ろう

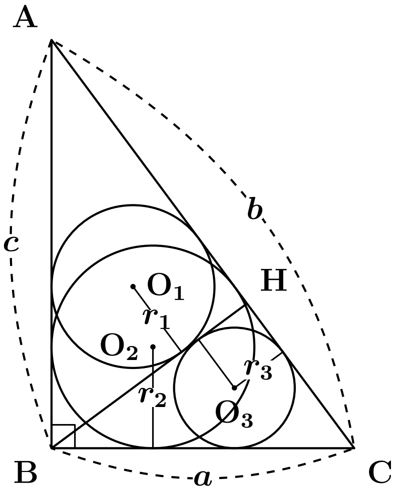
$\angle\mathrm{AHB} = \angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$

$\angle\mathrm{BAH} = \angle\mathrm{CAB}$（共通）

2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle\mathrm{ABH} \backsim \triangle\mathrm{ACB}$

一旦停止



算額について知ろう

$\angle ABC = \angle BHC = 90^\circ$

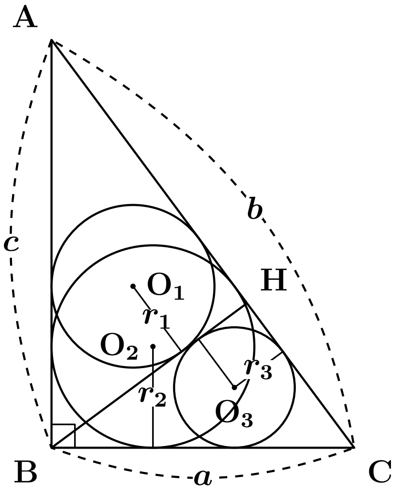
$\angle ACB = \angle BCH$（共通）

2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ACB \backsim \triangle BCH$ 一旦停止

さっきの結果と合体させて

$\triangle ABH \backsim \triangle ACB \backsim \triangle BCH$ 一旦停止



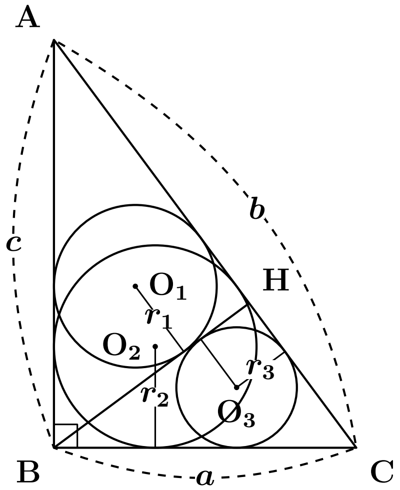
算額について知ろう

$\triangle \mathrm{ABH} \backsim \triangle \mathrm{BCH}$ より

$c : a = r_1 : r_3$ なので

$ar_1 = cr_3$ となって

$$r_1 = \frac{c}{a} r_3$$ 一旦停止



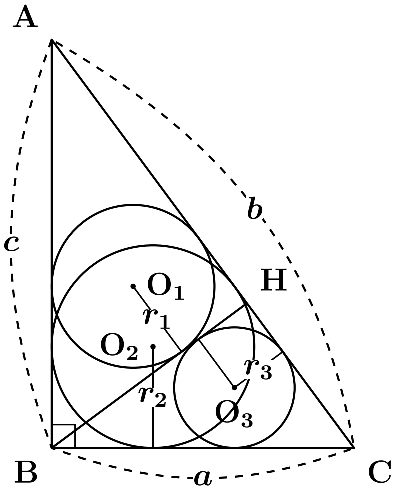
算額について知ろう

$\triangle \mathrm{BCH} \backsim \triangle \mathrm{ACB}$ より

$a : b = r_3 : r_2$ なので

$ar_2 = br_3$ となって

$$r_2 = \frac{b}{a} r_3$$ 一旦停止



算額について知ろう　$\mathrm{BH}=\dfrac{ac}{b}$

$\triangle \mathrm{ABH} \backsim \triangle \mathrm{ACB}$ より

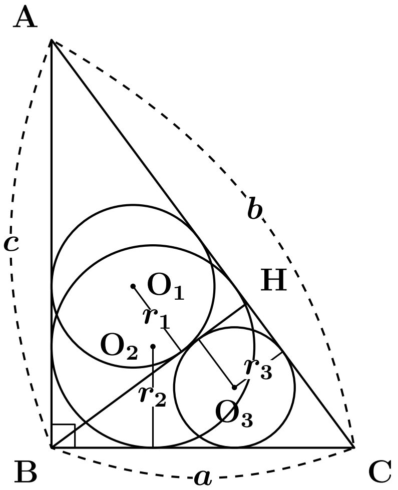
$c : b = \mathrm{BH} : a$ なので

$b \times \mathrm{BH} = ac$ となって

$$\mathrm{BH}=\frac{ac}{b}$$

一旦停止

（後で使う）



算額について知ろう　$\mathrm{BH}=\dfrac{ac}{b}$

$\triangle\mathrm{BCH}\backsim\triangle\mathrm{ABH}$ より

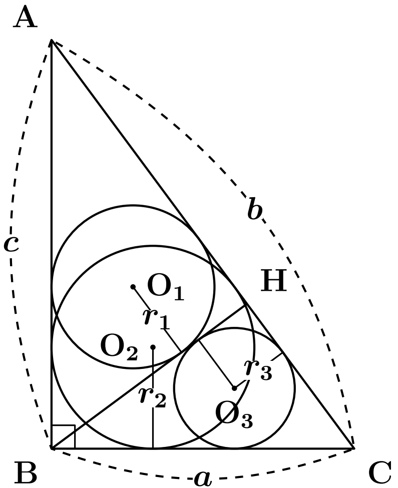
$a:c=\mathrm{CH}:\mathrm{BH}$ で

$a:c=\mathrm{CH}:\dfrac{ac}{b}$ だから

$c\times\mathrm{CH}=\dfrac{a^2c}{b}$ となって

$$\mathrm{CH}=\frac{a^2}{b}$$

一旦停止



算額について知ろう　$\mathrm{BH}=\dfrac{ac}{b}$

△BCH の辺の長さの合計は

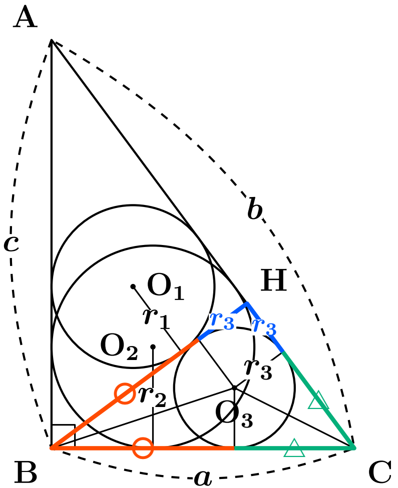
$$2a+2r_3$$ 一旦停止

また別の表し方では

BC＋CH＋HB なので、さっき計算した式を代入すると

$$a+\frac{a^2}{b}+\frac{ac}{b}$$ 一旦停止

で、これらは等しいので



算額について知ろう

$\mathrm{BH} = \frac{ac}{b}$

$$2a + 2r_3 = a + \frac{a^2}{b} + \frac{ac}{b}$$

$$2a + 2r_3 = \frac{ab + a^2 + ac}{b}$$

$$2r_3 = \frac{ab + a^2 + ac}{b} - 2a$$

$$2r_3 = \frac{ab + a^2 + ac - 2ab}{b}$$

算額について知ろう　$\mathrm{BH} = \frac{ac}{b}$

$$
\begin{aligned}
2r_3 &= \frac{ab + a^2 + ac - 2ab}{b} \\
2r_3 &= \frac{a^2 + ac - ab}{b} \\
r_3 &= \frac{a^2 + ac - ab}{2b}
\end{aligned}
$$

一旦停止

これらを $r_1 + r_2 + r_3$ に代入すると

算額について知ろう

$\mathrm{BH} = \frac{ac}{b}$

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_2 + r_3 &= \frac{c}{a} r_3 + \frac{b}{a} r_3 + r_3 \\
&= \frac{c+b+a}{a} r_3 \\
&= \frac{c+b+a}{a} \times \frac{a^2 + ac - ab}{2b} \\
&= \frac{(c+b+a)(a^2+ac-ab)}{2ab}
\end{aligned}
$$

算額について知ろう　$\mathrm{BH}=\dfrac{ac}{b}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(c+b+a)(a^2+ac-ab)}{2ab} \\
&= \frac{(c+b+a)a(a+c-b)}{2ab} \\
&= \frac{(c+b+a)(a+c-b)}{2b} \\
&= \frac{\Big((a+c)+b\Big)\Big((a+c)-b\Big)}{2b}
\end{aligned}
$$

算額について知ろう $\mathrm{BH}=\dfrac{ac}{b}$

$$=\frac{\Big((a+c)+b\Big)\Big((a+c)-b\Big)}{2b}$$

$$=\frac{(a+c)^2-b^2}{2b}$$

↑ 公式 $(\heartsuit+\spadesuit)(\heartsuit-\spadesuit)=\heartsuit^2-\spadesuit^2$

$$=\frac{a^2+2ac+c^2-b^2}{2b}$$

一旦停止

△ABC は直角三角形なので、三平方の定理より

$a^2+c^2=b^2$ が成り立つので

算額について知ろう $\mathrm{BH} = \dfrac{ac}{b}$

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_2 + r_3 &= \frac{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}{2b} \\
&= \frac{2ac + b^2 - b^2}{2b} \\
&= \frac{2ac}{2b} = \frac{ac}{b} = \mathrm{BH}
\end{aligned}
$$

【証明終わり】