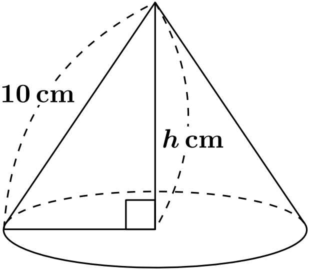
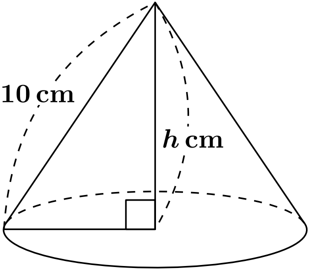
円錐（すい）の体積が最大になるのは？



側面の展開図が半径 $10\,\mathrm{cm}$ の扇形である円錐のうち、体積が最大になるのは、どのような円錐だろうか。

円錐の高さを $h\,\mathrm{cm}$ として計算しましょう。

円錐の体積が最大になるのは？



三平方の定理より、底面の半径は

$\sqrt{100-h^2}$ となる。

円錐の体積は $\dfrac{1}{3}\times$底面積$\times$高さ なので

$\dfrac{1}{3}\pi\sqrt{100-h^2}^{\,2}\cdot h$ となる。整理して

$\dfrac{\pi}{3}\left(-h^3+100h\right)$ の最大値を求める。

※ $-h^3+100h\ \ (0<h<10)$ の最大値を求めます

$f(h)=-h^3+100h\ (0<h<10)$ の最大値？

$f'(h)=-3h^2+100$ なので $f'(h)=0$ を解くと $h=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

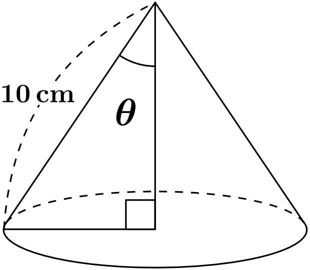
h	0	$\cdots$	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	10
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	0	$\nearrow$	$\frac{2000\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

$h=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{2000\sqrt{3}}{9}$

元に戻って、体積 $\dfrac{\pi}{3}(-h^3+100h)$ の最大値は

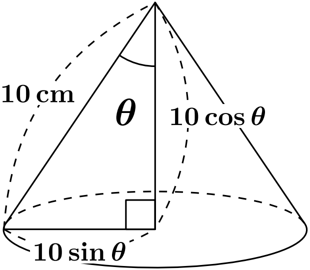
$$\frac{\pi}{3}\times\frac{2000\sqrt{3}}{9}=\frac{2000\sqrt{3}\,\pi}{27}\ \mathrm{cm}^3 \quad \boxed{答}$$

円錐の体積が最大になるのは？



今度は円錐の頂点から底面に下した垂線と母線のなす角を θ として円錐の体積が最大になる θ の値を求めてみよう。

円錐の体積が最大になるのは？



底面の半径は $10\sin\theta$

高さは $10\cos\theta$ となる。

円錐の体積は $\dfrac{1}{3}\times$底面積$\times$高さ なので

$\dfrac{1}{3}\pi(10\sin\theta)^2\cdot 10\cos\theta$ となる。整理して

$$\frac{1000\pi}{3}\sin^2\theta\cos\theta$$

※ $\sin^2\theta\cos\theta \ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めます

$f(\theta)=\sin^2\theta\cos\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ の最大値？

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を使って $\cos\theta$ だけにします。

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin^2\theta\cos\theta \\ &= (1-\cos^2\theta)\cos\theta \\ &= -\cos^3\theta+\cos\theta \end{aligned}$$

$t=\cos\theta$ とおくと $0<t<1$ なので

$f(t)=-t^3+t \quad (0<t<1)$ の最大値を求める。

$f(t)=-t^3+t \quad (0<t<1)$ の最大値？

$f'(t)=-3t^2+1$ なので $f'(t)=0$ を解くと $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\fallingdotseq 0.5774$ は三角比の表より $\theta\fallingdotseq 55^\circ$

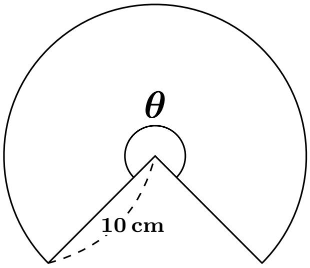
$-t^3+t$ の最大値は $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

元に戻って、体積 $\dfrac{1000\pi}{3}\sin^2\theta\cos\theta$ の最大値は

$$\frac{1000\pi}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{2000\sqrt{3}\,\pi}{27}\ \mathrm{cm}^3 \quad \boxed{\text{答}}$$

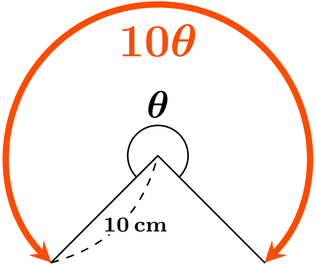
$$(\theta \fallingdotseq 55^\circ)$$

円錐の体積が最大になるのは？



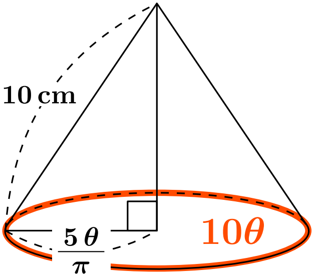
次は側面の展開図の扇形の中心角を θ として、円錐の体積が最大になる θ の値を求めてみよう。

円錐の体積が最大になるのは？



2π ラジアン (360°) で円周の長さ 20π なので、θ ラジアン だと $10\,\theta$ となる。
$(0 < \theta < 2\pi)$

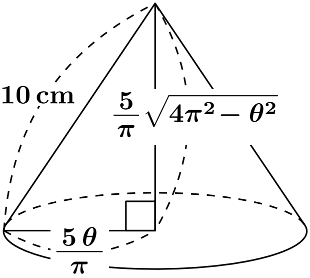
円錐の体積が最大になるのは？



底面の半径を r とすると、底面の円周の長さは $2\pi r$ となるが、これは先ほど計算した側面の展開図の扇形の弧の長さと等しいので $10\,\theta$ となる。

$2\pi r = 10\,\theta$ から $r = \dfrac{5\,\theta}{\pi}$ になる。

円錐の体積が最大になるのは？



高さを h とすると三平方の定理より

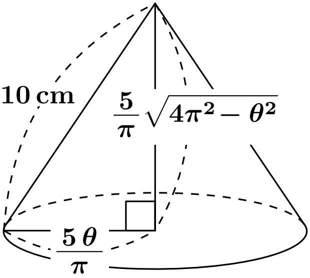
$\left(\frac{5\theta}{\pi}\right)^2+h^2=10^2$ から

$$h=\sqrt{10^2-\left(\frac{5\theta}{\pi}\right)^2}=\sqrt{100-\frac{25\theta^2}{\pi^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{100\pi^2-25\theta^2}{\pi^2}}=\sqrt{\frac{25(4\pi^2-\theta^2)}{\pi^2}}$$

$$=\frac{5}{\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$$

円錐の体積が最大になるのは？



円錐の体積は $\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高さ なので

$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{5\,\theta}{\pi}\right)^2\frac{5}{\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$ となる。

整理して

$$=\frac{1}{3}\pi\frac{125\,\theta^2}{\pi^3}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$$

$$=\frac{125}{3\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$$ となる。

※ $\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$ の最大値を求める。

$f(\theta)=\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\quad(0<\theta<2\pi)$ の最大値？

$f(\theta)=\theta^2\left(4\pi^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}$ だから

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= (\theta^2)'(4\pi^2-\theta^2)^{\frac{1}{2}}+\theta^2\left((4\pi^2-\theta^2)^{\frac{1}{2}}\right)' \\
&= 2\theta(4\pi^2-\theta^2)^{\frac{1}{2}}+\theta^2\cdot\frac{1}{2}(4\pi^2-\theta^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2\theta) \\
&= 2\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2}-\frac{\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} \\
&= \frac{2\theta(4\pi^2-\theta^2)-\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} = \frac{8\pi^2\theta-3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}
\end{aligned}
$$

一旦停止

$f(\theta)=\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\quad(0<\theta<2\pi)$ の最大値？

$\dfrac{8\pi^2\theta-3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}=0$ とおいて $8\pi^2\theta-3\theta^3=0$

$\theta>0$ なので

$$\begin{aligned}8\pi^2-3\theta^2 &= 0\\ 3\theta^2 &= 8\pi^2\\ \theta^2 &= \frac{8\pi^2}{3}\\ \theta &= \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\end{aligned}$$

$f(\theta)=\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\quad(0<\theta<2\pi)$ の最大値？

θ	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\theta=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ のとき

$$f(\theta) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right)^2\sqrt{4\pi^2-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right)^2}$$

$f(\theta)=\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\quad(0<\theta<2\pi)$ の最大値？

$$= \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right)^2\sqrt{4\pi^2-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right)^2}$$

$$= \frac{24}{9}\pi^2\sqrt{4\pi^2-\frac{24}{9}\pi^2}$$

$$= \frac{24}{9}\pi^2\sqrt{\frac{36\pi^2-24\pi^2}{9}}$$

$$= \frac{24}{9}\pi^2\sqrt{\frac{12\pi^2}{9}}$$

$f(\theta)=\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\quad(0<\theta<2\pi)$ の最大値？

$$=\frac{24}{9}\pi^2\sqrt{\frac{12\pi^2}{9}}$$

$$=\frac{8}{3}\pi^2\sqrt{\frac{4\pi^2}{3}}$$

$$=\frac{8}{3}\pi^2\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{16\pi^3}{3\sqrt{3}}=\frac{16\sqrt{3}\pi^3}{9}$$

一旦停止

$f(\theta)=\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$ の最大値は $\dfrac{16\sqrt{3}\pi^3}{9}$

元に戻って、体積 $\dfrac{125}{3\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$ の最大値は

$$\frac{125}{3\pi^2}\cdot\frac{16\sqrt{3}\pi^3}{9}=\frac{2000\sqrt{3}\pi}{27}\ \mathrm{cm}^3 \qquad \boxed{答}$$

$$\left(\theta=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\times180^\circ\fallingdotseq294^\circ\right)$$

ああ疲れた