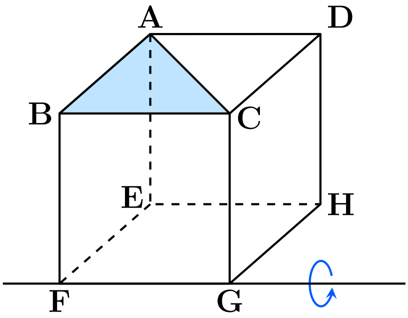
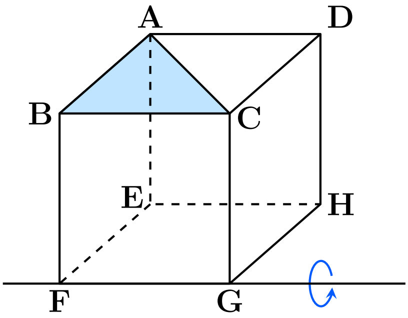
立方体表面の △ABC の回転体の体積？

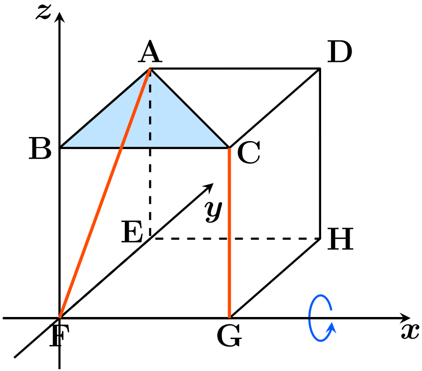


1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD－EFGH がある。
3 点 A, B, C を頂点とする三角形を直線 FG のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めなさい。



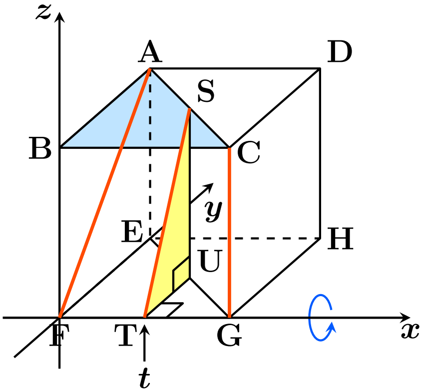
求める体積は $\triangle\mathrm{ABC}$ を回転してできる回転体の体積 V_1 から、BCGF を回転してできる回転体の体積 V_2 を引いたものである。

まず V_1 を求める。



点 D の座標を $(1, 1, 1)$ とする。

V_1 は $\mathrm{AF} \to \mathrm{CG}$ を半径とする回転体の体積となる。

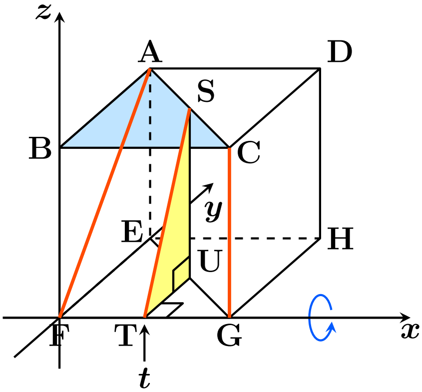


x 軸上の座標 t の点を T、
T を通って x 軸と垂直な平面が AC, EG と交わる点を S, U とすると $\mathrm{SU}=1,\ \mathrm{UT}=1-t$ となるので、三平方の定理より

$$\mathrm{ST}=\sqrt{1^2+(1-t)^2}$$
$$=\sqrt{t^2-2t+2}$$

$t:0\to1$ で積分すればよいので

解説



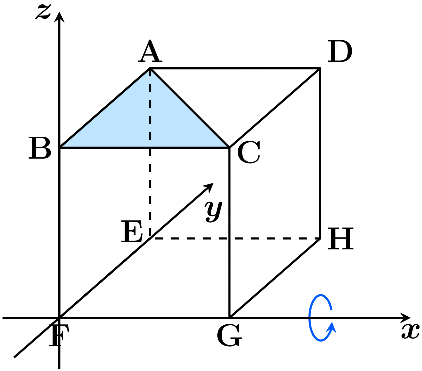
$V_1 = \pi \int_0^1 \sqrt{t^2 - 2t + 2}^{\,2} dt$ を計算すればよい。

V_1 はこうなる

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \pi \int_0^1 \sqrt{t^2-2t+2}^{\,2}\,dt \\
&= \pi \int_0^1 (t^2-2t+2)\,dt \\
&= \pi \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t \right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{3} - 1 + 2 \right)\pi \quad = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

一旦停止

V_2 はこうなる



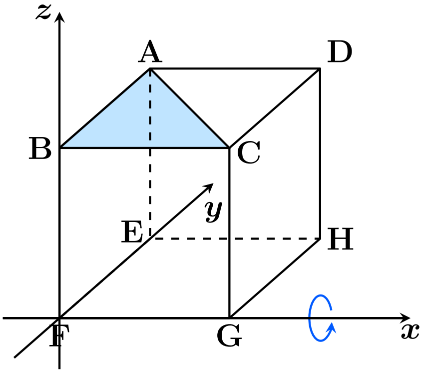
V_2 は BCGF を直線 FG のまわりに 1 回転してできる回転体の体積だから

$V_2 = \pi \int_0^1 1\, dt$ を計算すればよい。

$$= \pi \Big[t \Big]_0^1 \quad = \pi$$

一旦停止

V_2 はこうなる



よって求める回転体の体積は

$$V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi - \pi \quad = \frac{\pi}{3}$$ 答

$\triangle$ABC は xz 平面上にはないので計算が少し複雑になります。