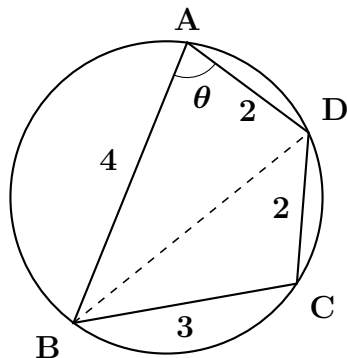


円に内接する四角形の面積

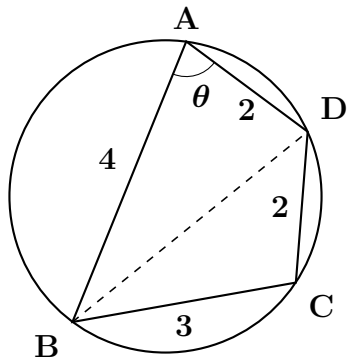


左図のような円に内接する四角形 ABCD で、次の問いに答えなさい。

- (1) $\angle BAD = \theta$ とするとき $\cos \theta$ の値を求めなさい。
- (2) 対角線 BD の長さを求めなさい。
- (3) 四角形 ABCD の面積 S を求めなさい。

【出典】実教出版、数I007-902 新編数学I Flex, p159 章末 8

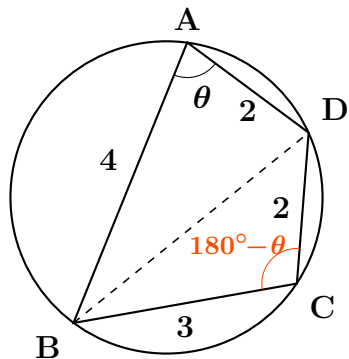
円に内接する四角形の面積



$\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ それぞれで余弦定理を使って BD を表す。

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos \theta \\ &= 20 - 16 \cos \theta \end{aligned}$$

円に内接する四角形の面積



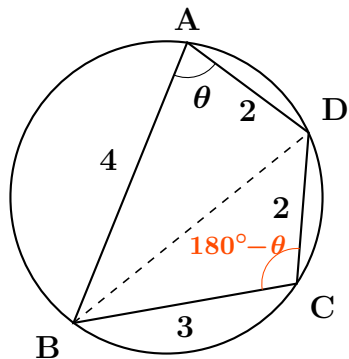
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

ABCD は円に内接するから
 $\angle BCD = 180^\circ - \theta$ となるので

$$\begin{aligned} BD^2 &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-\cos \theta) \\ &= 13 + 12 \cos \theta \end{aligned}$$

よって $20 - 16 \cos \theta = 13 + 12 \cos \theta$
を計算して

円に内接する四角形の面積



$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$20 - 16 \cos \theta = 13 + 12 \cos \theta$$

$$-28 \cos \theta = -7$$

$$\cos \theta = \frac{1}{4} \quad \boxed{\text{答}}$$

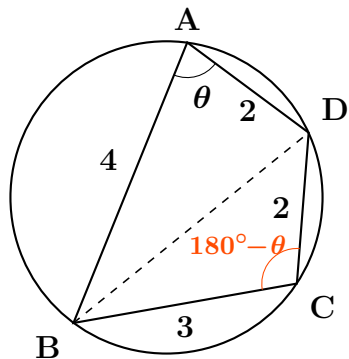
次に、この値をさっきの式に代入して

$$BD^2 = 20 - 16 \cos \theta$$

$$= 20 - 16 \cdot \frac{1}{4} = 16$$

$$BD > 0 \text{ より } BD = \sqrt{16} = 4 \quad \boxed{\text{答}}$$

円に内接する四角形の面積



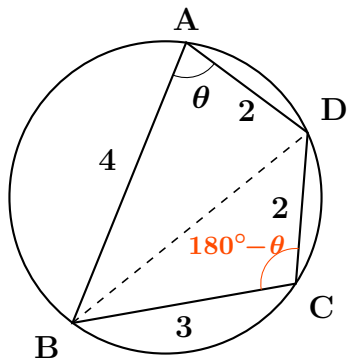
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

面積公式 $S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$ を使うために
 $\sin \theta$ を求める ($\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$)

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin \theta > 0$ なので

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

円に内接する四角形の面積



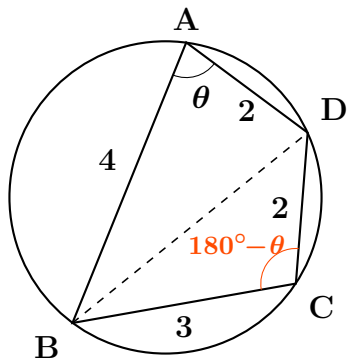
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin(180^\circ - \theta) \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin \theta \end{aligned}$$

円に内接する四角形の面積



$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

よって

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \theta$$

$$+ \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{7\sqrt{15}}{4} \quad \boxed{\text{答}}$$