

何回カードを引けばよい？

袋の中に[A], [B], [C], [D], [E]の 5 枚のカードが入っている。この袋の中から 1 枚を引いてカードにかかっている文字を記録する。記録した後、引いたカードは袋の中に戻す。全部の種類のカードがそろうまでこの作業をくり返す。全部の種類のカードがそろうには、平均して何回カードを引けばよいだろうか。

実教出版、高校数学Ⅰ 新訂版、7 実教 数Ⅰ 007-903, 168 ページ

コンプリートガチャなどと呼ばれる

まず 1 種類目を考える。

1 回引けば 5 種類のどれかが出るので、
まず 1 回

※ 海外ではクーポン・コレクターズ問題 (Coupon Collector's Problem) [web](#) と呼ばれているようだ。unlike probabilities [web](#) とすると同種の論文が見つかる。

コンプリートガチャなどと呼ばれる

次に 2 種類目を考える。

1 種類目と異なる種類を引く確率は $\frac{4}{5}$ なので、
(確率的には) $\frac{5}{4}$ 回引けば $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$ となって
1 種類目と異なる種類をそろえることができる。

コンプリートガチャなどと呼ばれる

次に 3 種類目を考える。

1～2 種類目と異なる種類を引く確率は $\frac{3}{5}$ なので、(確率的には) $\frac{5}{3}$ 回引けば $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$ となって 1～2 種類目と異なる種類をそろえることができる。

コンプリートガチャなどと呼ばれる

次に 4 種類目を考える。

1～3 種類目と異なる種類を引く確率は $\frac{2}{5}$ なので、(確率的には) $\frac{5}{2}$ 回引けば $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$ となって 1～3 種類目と異なる種類をそろえることができる。

コンプリートガチャなどと呼ばれる

最後の 5 種類目を考える。

1～4 種類目と異なる種類を引く確率は $\frac{1}{5}$ なので、(確率的には) 5 回引けば $\frac{1}{5} \times 5 = 1$ となって 1～4 種類目と異なる種類をそろえることができる。

よって

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + 5 \\ = & \frac{5}{5} + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} \\ = & 5 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \end{aligned}$$

よって

$$= 5 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= 5 \cdot \frac{60 + 30 + 20 + 15 + 12}{60}$$

$$= 5 \cdot \frac{137}{60}$$

$$= \frac{137}{12} \doteq 11.4166 \cdots \quad \text{約 11.4 回} \quad \boxed{\text{答}}$$

発展させよう

□Aのカードだけ、ほかのカードの 2 倍の割合で出るとしたとき、全部の種類のカードがそろうには平均して何回を引けばよいか考えてみよう。

計算式 武藤拓志さん 参考 URL の研究結果

$$E_2(n) = \sum_{s=1}^n f(s) g(s)$$

$$f(s) = \frac{(n-1)p}{(s-1)p + (n-s)} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{(n-t)(1-p)}{(t-1)p + (n-t)}$$

$$g(s) = \sum_{k=1}^s \frac{n-1}{(n-p)-k(1-p)} + \sum_{k=s+1}^n \frac{n-1}{(n-k+1)(1-p)}$$

- ▶ 全アイテムは n 個（うち 1 個のレアアイテムの出る確率は p , 残りのアイテムの確率は等しい）
- ▶ E_2 は全アイテムを集めるのに要する回数の期待値
- ▶ $f(s)$ はある引き方となる確率、 $g(s)$ はその引き方で要する回数の期待値
- ▶ $\sum$ で 上の数 $<$ 下の数 のときは 0 として計算
- ▶ $\prod$ で 上の数 $<$ 下の数 のときは 1 として計算

カードは 5 種類なので $n = 5, p = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} E_2(5) &= \sum_{s=1}^5 f(s)g(s) \\ &= f(1)g(1)+f(2)g(2)+f(3)g(3)+f(4)g(4)+f(5)g(5) \end{aligned}$$

を計算すれば良い。A の出る確率を $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,
B,C,D,E の出る確率を $\frac{1}{6}$ として

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{(n-1)p}{(s-1)p+(n-s)} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{(n-t)(1-p)}{(t-1)p+(n-t)} \\ &= \frac{4 \cdot \frac{1}{3}}{(s-1)\frac{1}{3}+(5-s)} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{(5-t)(1-\frac{1}{3})}{(t-1)\frac{1}{3}+(5-t)} \end{aligned}$$

$f(s)$ を計算 $n = 5, p = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{4 \cdot \frac{1}{3}}{(s-1)\frac{1}{3} + (5-s)} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{(5-t)(1-\frac{1}{3})}{(t-1)\frac{1}{3} + (5-t)} \\ &= \frac{\frac{4}{3}}{(s-1)\frac{1}{3} + (5-s)} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{(5-t)\frac{2}{3}}{(t-1)\frac{1}{3} + (5-t)} \\ &= \frac{4}{(s-1) + (15-3s)} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{(5-t)2}{(t-1) + (15-3t)} \end{aligned}$$

$f(s)$ を計算

$$n = 5, p = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{4}{(s-1)+(15-3s)} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{(5-t)2}{(t-1)+(15-3t)} \\ &= \frac{4}{14-2s} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{10-2t}{14-2t} \\ &= \frac{4}{14-2s} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{10-2t}{14-2t} \\ &= \frac{2}{7-s} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{5-t}{7-t} \end{aligned}$$



$g(s)$ を計算 $n = 5, p = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{k=1}^s \frac{n-1}{(n-p)-k(1-p)} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{n-1}{(n-k+1)(1-p)} \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{5-1}{(5-\frac{1}{3})-k(1-\frac{1}{3})} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{5-1}{(5-k+1)(1-\frac{1}{3})} \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{4}{\frac{14}{3}-\frac{2}{3}k} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{4}{(6-k)\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$g(s)$ を計算 $n = 5, p = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{k=1}^s \frac{4}{\frac{14}{3} - \frac{2}{3}k} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{4}{(6-k)\frac{2}{3}} \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{12}{14-2k} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{12}{12-2k} \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{6}{7-k} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{6}{6-k} \end{aligned}$$



$$f(s) = \frac{2}{7-s} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{5-t}{7-t} \qquad g(s) = \sum_{k=1}^s \frac{6}{7-k} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{6}{6-k}$$

$s = 1$ のとき

$$f(1) = \frac{2}{7-1} \cdot \prod_{t=1}^0 \frac{5-t}{7-t} = \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} g(1) &= \sum_{k=1}^1 \frac{6}{7-k} + \sum_{k=2}^5 \frac{6}{6-k} \\ &= \frac{6}{6} + \left(\frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2} + 2 + 3 + 6 \right) \\ &= 12 + \frac{3}{2} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2}{7-s} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{5-t}{7-t} \qquad g(s) = \sum_{k=1}^s \frac{6}{7-k} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{6}{6-k}$$

$s = 2$ のとき

$$f(2) = \frac{2}{7-2} \cdot \prod_{t=1}^1 \frac{5-t}{7-t} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$$

$$\begin{aligned} g(2) &= \sum_{k=1}^2 \frac{6}{7-k} + \sum_{k=3}^5 \frac{6}{6-k} \\ &= \left(\frac{6}{6} + \frac{6}{5} \right) + \left(\frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} \right) \\ &= \left(1 + \frac{6}{5} \right) + (2 + 3 + 6) \\ &= 12 + \frac{6}{5} = \frac{66}{5} \end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2}{7-s} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{5-t}{7-t} \qquad g(s) = \sum_{k=1}^s \frac{6}{7-k} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{6}{6-k}$$

$s = 3$ のとき

$$f(3) = \frac{2}{7-3} \cdot \prod_{t=1}^2 \frac{5-t}{7-t} = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} g(3) &= \sum_{k=1}^3 \frac{6}{7-k} + \sum_{k=4}^5 \frac{6}{6-k} \\ &= \left(\frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} \right) + \left(\frac{6}{2} + \frac{6}{1} \right) \\ &= \left(1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} \right) + (3 + 6) \\ &= 10 + \frac{12+15}{10} = 10 + \frac{27}{10} = \frac{127}{10} \end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2}{7-s} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{5-t}{7-t} \qquad g(s) = \sum_{k=1}^s \frac{6}{7-k} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{6}{6-k}$$

$s = 4$ のとき

$$f(4) = \frac{2}{7-4} \cdot \prod_{t=1}^3 \frac{5-t}{7-t} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{15}$$

$$\begin{aligned} g(4) &= \sum_{k=1}^4 \frac{6}{7-k} + \sum_{k=5}^5 \frac{6}{6-k} \\ &= \left(\frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} \right) + \frac{6}{1} \\ &= \left(1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 \right) + 6 \\ &= 9 + \frac{12+15}{10} = 9 + \frac{27}{10} = \frac{117}{10} \end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2}{7-s} \cdot \prod_{t=1}^{s-1} \frac{5-t}{7-t} \qquad g(s) = \sum_{k=1}^s \frac{6}{7-k} + \sum_{k=s+1}^5 \frac{6}{6-k}$$

$s = 5$ のとき

$$f(5) = \frac{2}{7-5} \cdot \prod_{t=1}^4 \frac{5-t}{7-t} = \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

$$\begin{aligned} g(5) &= \sum_{k=1}^5 \frac{6}{7-k} + \sum_{k=6}^5 \frac{6}{6-k} \\ &= \left(\frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} \right) + 0 \\ &= 1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 + 3 \\ &= 6 + \frac{12+15}{10} = 6 + \frac{27}{10} = \frac{87}{10} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} E_2(5) &= f(1)g(1) + f(2)g(2) + f(3)g(3) + f(4)g(4) + f(5)g(5) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} + \frac{4}{15} \cdot \frac{66}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{127}{10} + \frac{2}{15} \cdot \frac{117}{10} + \frac{1}{15} \cdot \frac{87}{10} \\ &= \frac{9}{2} + \frac{88}{25} + \frac{127}{50} + \frac{39}{25} + \frac{29}{50} \\ &= \frac{225 + 176 + 127 + 78 + 29}{50} = \frac{635}{50} = 12.7 \quad \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$

シミュレーションの結果とも一致しているので正しいと思う。

[complete-gacha.xlsm](#) ▶ web

参考 URL

理数教育研究所、2016 年度受賞作品、優秀賞 ▶ web

▶ コンプガチャの確率について

愛知県立一宮高等学校 3 年（当時）武藤拓志さん

[https:](https://www.rimse.or.jp/research/past/pdf/4th/work10.pdf)

[//www.rimse.or.jp/research/past/pdf/4th/work10.pdf](https://www.rimse.or.jp/research/past/pdf/4th/work10.pdf) ▶ web

▶ 指導された齋木清治先生？

<http://www.mondai.sakura.ne.jp/column/mathcon.pdf> ▶ web

高校数学の問題を作る 工夫・コツとデータ ▶ web