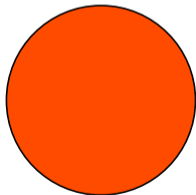
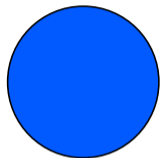


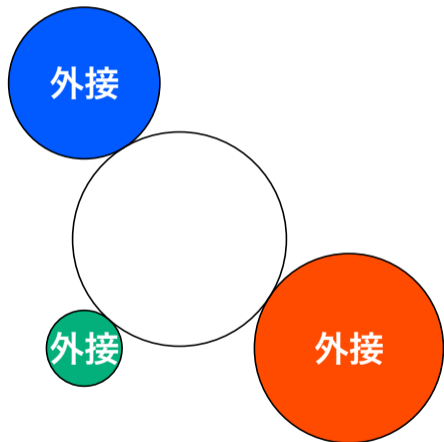
問題



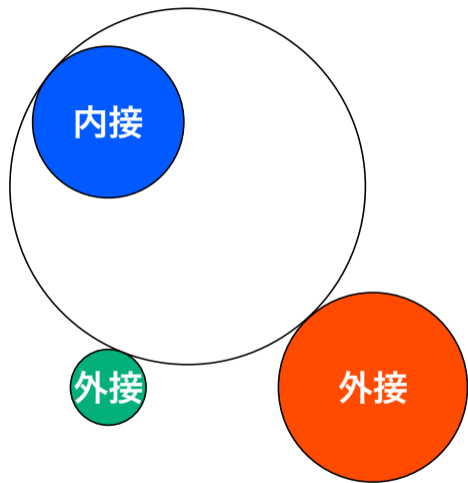
図のような 3 つの円すべてに接する円は何種類あるでしょうか

たけしのコマ大数学科
第 12 期 DVD-BOX
23 限目、問 145、アポロニウスの円

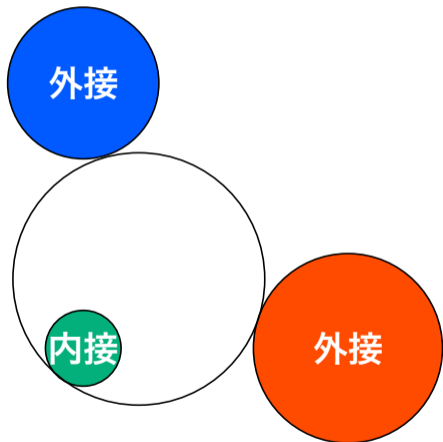
解答



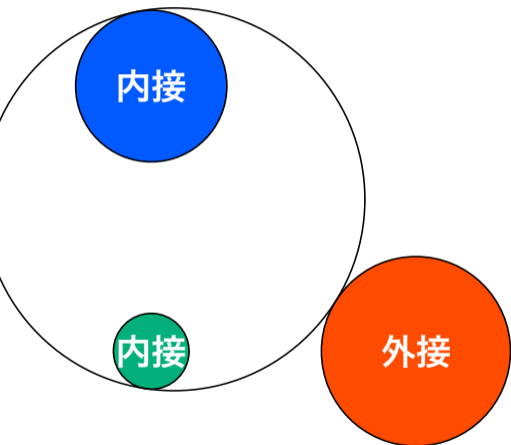
解答



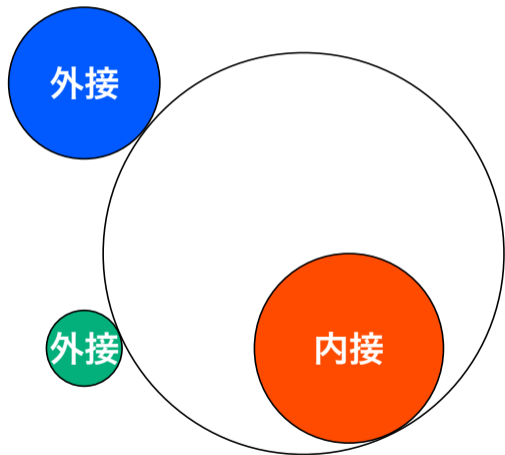
解答



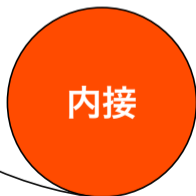
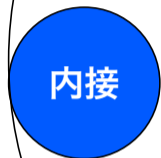
解答



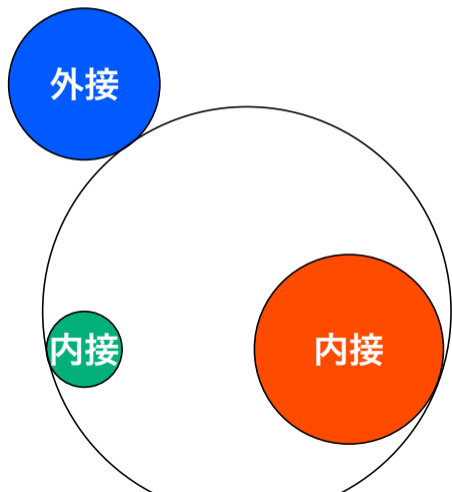
解答



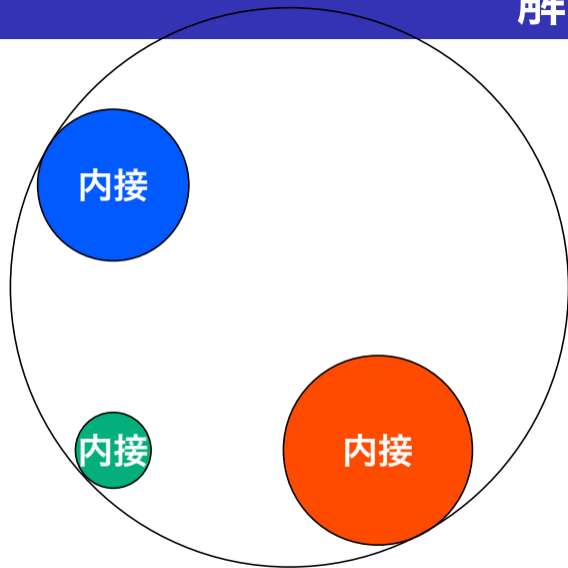
解答



解答



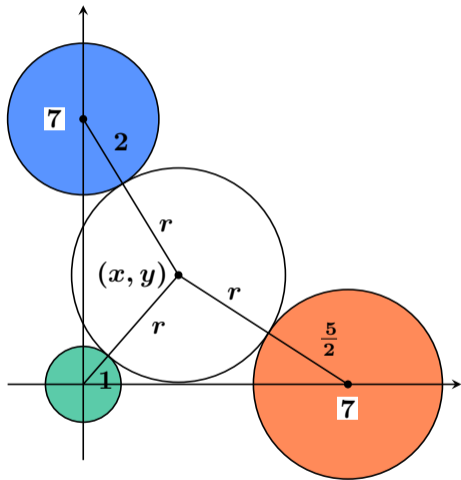
解答



答

8種類

解説



$$\textcircled{1} \sqrt{x^2 + y^2} = r \pm 1$$

$$\textcircled{2} \sqrt{(x-7)^2 + y^2} = r \pm \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x^2 + (y-7)^2} = r \pm 2$$

$2 \times 2 \times 2 = 8$ 種類 となります。

すべてが $+$ の場合を計算してみよう。

+ の場合を計算します

① $\sqrt{x^2 + y^2} = r + 1$ 両辺 2 乗して整理して

$$x^2 + y^2 = r^2 + 2r + 1 \quad \dots \textcircled{1}'$$

② $\sqrt{(x-7)^2 + y^2} = r + \frac{5}{2}$ 両辺 2 乗して整理して

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 = r^2 + 5r + \frac{25}{4} \quad \dots \textcircled{2}'$$

③ $\sqrt{x^2 + (y-7)^2} = r + 2$ 両辺 2 乗して整理して

$$x^2 + y^2 - 14y + 49 = r^2 + 4r + 4 \quad \dots \textcircled{3}'$$

①' を ②' に代入して x^2, y^2 を消去して整理して

$$x = -\frac{3}{14}r + \frac{25}{8}$$

+ の場合を計算します

$$x^2 + y^2 = r^2 + 2r + 1 \quad \dots \textcircled{1}'$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 = r^2 + 5r + \frac{25}{4} \quad \dots \textcircled{2}'$$

$$x^2 + y^2 - 14y + 49 = r^2 + 4r + 4 \quad \dots \textcircled{3}'$$

同様に $\textcircled{1}'$ を $\textcircled{3}'$ に代入して

$$y = -\frac{1}{7}r + \frac{23}{7} \quad \left(x = -\frac{3}{14}r + \frac{25}{8} \quad \text{だった} \right)$$

これらを $\textcircled{1}'$ に代入すると r の 2 次方程式となるのでパソコンで解くと $r \doteq 2.8276 \dots$ になる ($r < 0$ の解は不適)

+ の場合を計算します

$$x = -\frac{3}{14}r + \frac{25}{8}, \quad y = -\frac{1}{7}r + \frac{23}{7}$$

$r \doteq 2.8276 \dots$ を代入して

$x \doteq 2.5191 \dots$, $y \doteq 2.8818 \dots$ となる。

円についての反転（円で全平面を反転）という変換をすると、問題が解きやすくなるということを、番組内では説明していました。（双曲線を使う解法もあるそうです）