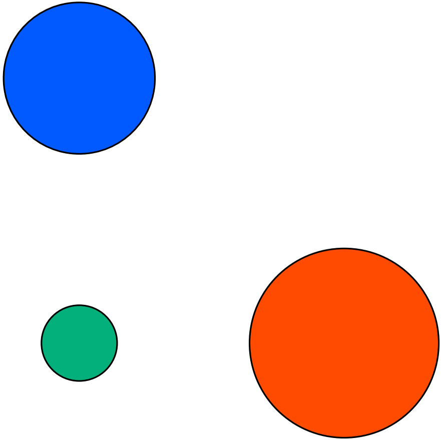
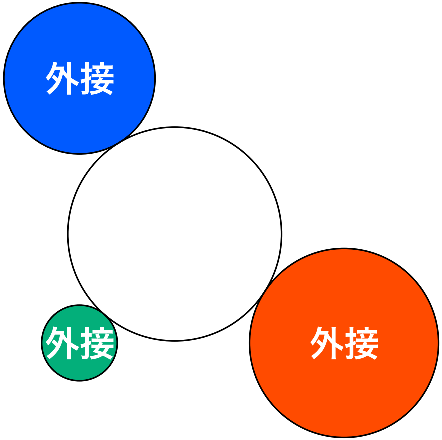
問題



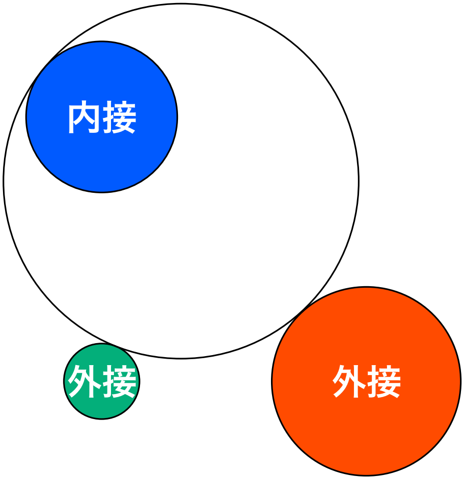
図のような 3 つの円すべてに接する円は何種類あるでしょうか

たけしのコマ大数学科
第 12 期 DVD-BOX
23 限目、問 145、アポロニウスの円

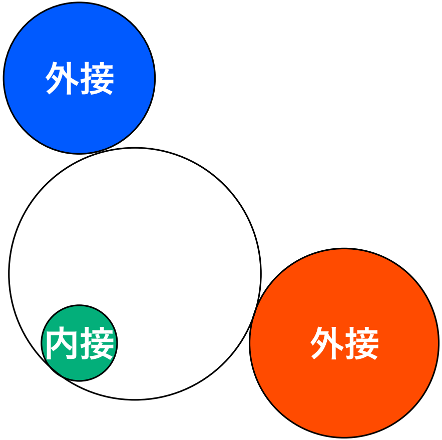
解答



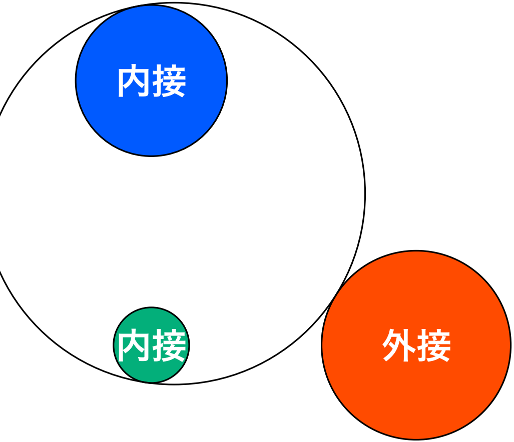
解答



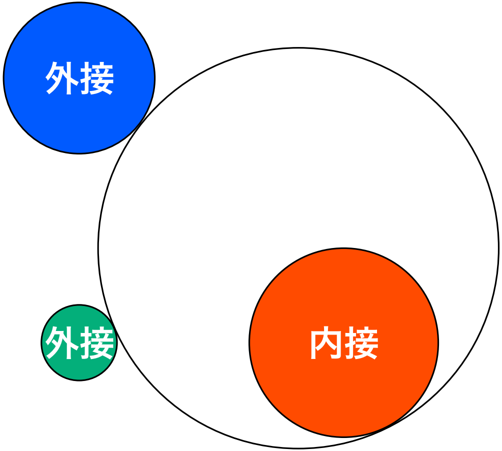
解答



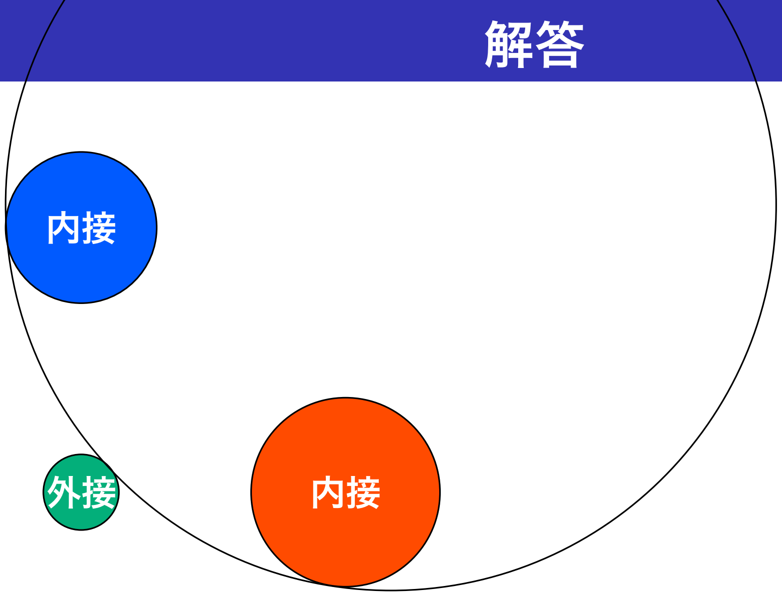
解答



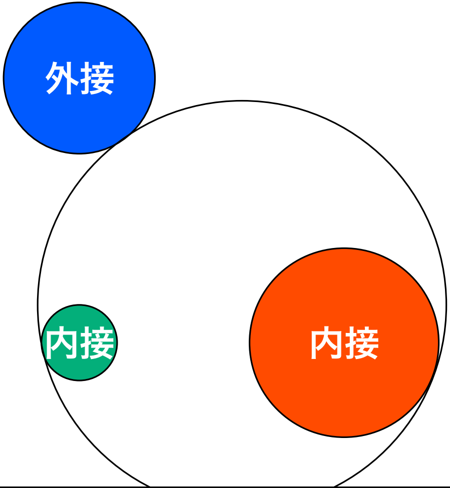
解答



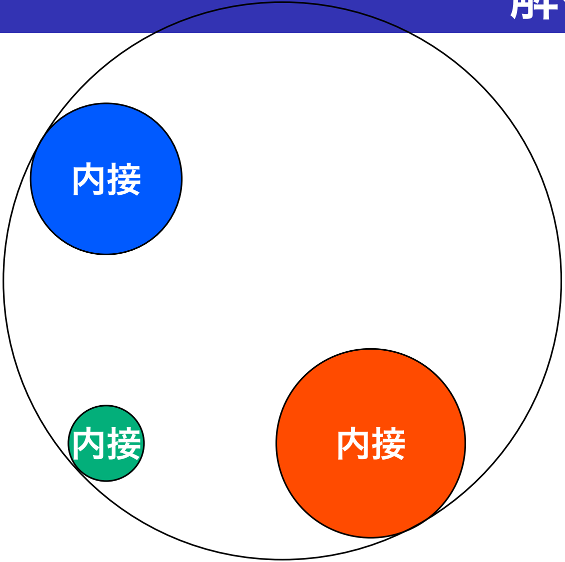
解答



解答

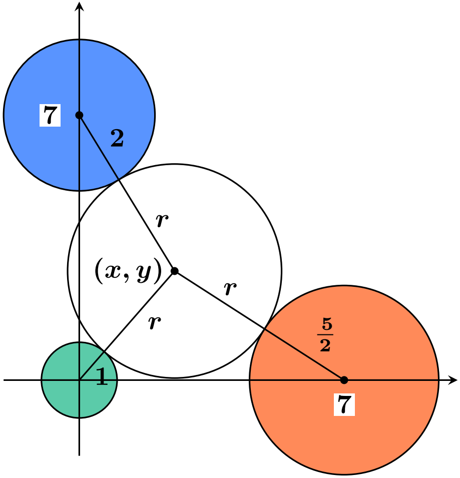


解答



答　8種類

解説



① $\sqrt{x^2+y^2}=r\pm 1$

② $\sqrt{(x-7)^2+y^2}=r\pm\frac{5}{2}$

③ $\sqrt{x^2+(y-7)^2}=r\pm 2$

$2\times 2\times 2=8$ 種類 となります。

すべてが $+$ の場合を計算してみよう。

$+$ の場合を計算します

① $\sqrt{x^2+y^2}=r+1$　両辺 2 乗して整理して

$x^2+y^2=r^2+2r+1 \quad \cdots ①'$

② $\sqrt{(x-7)^2+y^2}=r+\frac{5}{2}$　両辺 2 乗して整理して

$x^2-14x+49+y^2=r^2+5r+\frac{25}{4} \quad \cdots ②'$

③ $\sqrt{x^2+(y-7)^2}=r+2$　両辺 2 乗して整理して

$x^2+y^2-14y+49=r^2+4r+4 \quad \cdots ③'$

①$'$ を ②$'$ に代入して x^2, y^2 を消去して整理して

$$x=-\frac{3}{14}r+\frac{25}{8}$$

$+$ の場合を計算します

$$x^2+y^2=r^2+2r+1 \quad \cdots ①'$$
$$x^2-14x+49+y^2=r^2+5r+\frac{25}{4} \quad \cdots ②'$$
$$x^2+y^2-14y+49=r^2+4r+4 \quad \cdots ③'$$

同様に ①$'$ を ③$'$ に代入して

$$y=-\frac{1}{7}r+\frac{23}{7} \qquad \left(x=-\frac{3}{14}r+\frac{25}{8} \quad \text{だった}\right)$$

これらを ①$'$ に代入すると r の 2 次方程式となるのでパソコンで解くと $r \fallingdotseq 2.8276\cdots$ になる（$r<0$ の解は不適）

＋の場合を計算します

$$x = -\frac{3}{14}r + \frac{25}{8}\,, \qquad y = -\frac{1}{7}r + \frac{23}{7}$$

$r \fallingdotseq 2.8276\cdots$ を代入して

$x \fallingdotseq 2.5191\cdots$, $y \fallingdotseq 2.8818\cdots$ となる。

円についての反転（円で全平面を反転）という変換をすると、問題が解きやすくなると言うことを、番組内では説明していました。(双曲線を使う解法もあるそうです)