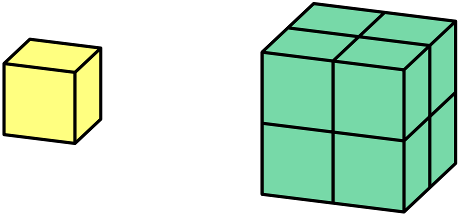
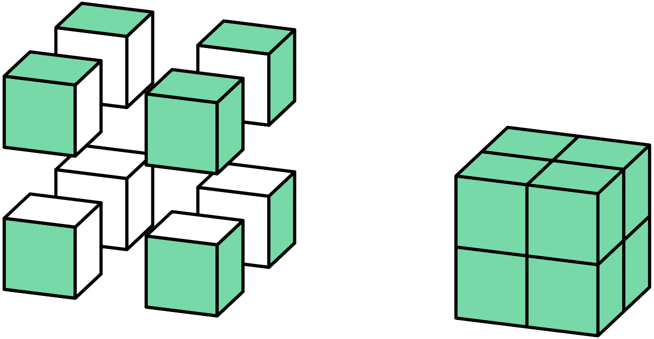
コマ大、ディオファントス

立方体で直方体を作り、外側の面に印をつける時、印がついた面とついていない面の数が同じになるのはどのような直方体か答えなさい



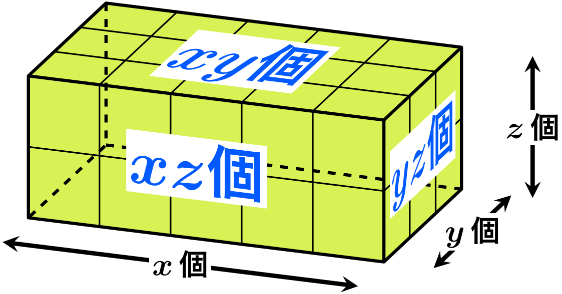
たけしのコマ大数学科
第3期 DVD–BOX
6限目　問㉚

$2 \times 2 \times 2$ の立方体は答えの 1 つです



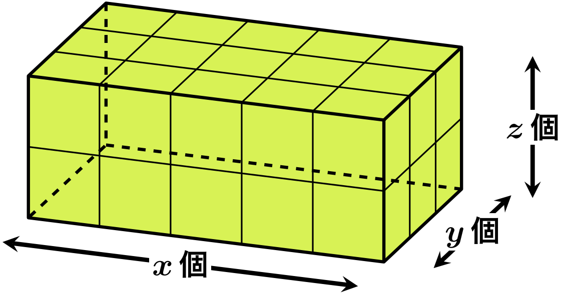
塗られた面 ＝ 塗られていない面　にしたい

塗られた面の個数は　$2xy+2yz+2zx$ 個



塗られた面 ＝ 塗られていない面　にしたい

立方体は全部で xyz 個 で、1 個で 6 面あるので、全部の面の個数は　$6xyz$ 個



塗られた面＝塗られていない面　のときは

$$\begin{aligned} \text{塗られた面} + \text{塗られていない面} &= \text{全部の面} \\ 2 \times \text{塗られた面} &= \text{全部の面} \\ 2(2xy + 2yz + 2zx) &= 6xyz \\ 2xy + 2yz + 2zx &= 3xyz \\ xy + yz + zx &= \frac{3}{2}xyz \end{aligned}$$

塗られた面 = 塗られていない面　のときは

$$xy + yz + zx = \frac{3}{2}xyz$$

$$\frac{xy}{xyz} + \frac{yz}{xyz} + \frac{zx}{xyz} = \frac{3xyz}{2xyz}$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$$ を調べる

ここから先は、さんざん考えて、いろいろ試行錯誤した結果をまとめたものなので、
すぐにこのような解答が出来るわけではありません。

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{2}$ を調べる

$x \leqq y \leqq z$ とする。

$x \geqq 3$ とすると $y \geqq 3$, $z \geqq 3$ だから

$\dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{3}$ となって

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leqq 1$ つまり最大でも 1 で、$\dfrac{3}{2}$

にはならないから、$x=1$, 2 だけ調べればよい。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \quad (x \leqq y \leqq z)$$

$x=2$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{3}{2} \\
\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{3}{2}-\frac{1}{x} \\
\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2} \\
\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= 1
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad x=2 \quad (x \leqq y \leqq z)$$

$y \geqq 3$ のときは $z \geqq 3$ なので $\frac{1}{y} \leqq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{3}$

となって $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{2}{3}$ だから 1 になることはない

ので $y < 3$ にしかならない。

$y=2$ とすると $\frac{1}{z}=1-\frac{1}{y}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

よって $z=2$

答 $(2, 2, 2)$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \quad (x \leqq y \leqq z)$$

$x=1$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{3}{2} \\
\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{3}{2}-\frac{1}{x} \\
\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{3}{2}-\frac{1}{1} \\
\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \quad x=1 \quad (x \leqq y \leqq z)$$

$y \geqq 5$ のときは $z \geqq 5$ なので $\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{5}$ となって $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{2}{5}$ だから $\dfrac{1}{2}$ になることはないので $y < 5$ にしかならない。

$y=4$ とすると $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

よって $z=4$ 　　　　答　$(1, 4, 4)$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \quad x=1 \quad (x \leqq y \leqq z)$$

$y=3$ とすると $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

よって $z=6$ 　　　　答　$(1, 3, 6)$

$y \leqq 2$ とすると $\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{2}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

このような z はない。

全部をまとめて 答 $(2, 2, 2)$, $(1, 4, 4)$, $(1, 3, 6)$

ディオファントスは何歳まで生きた？

ディオファントスは、
その一生の 6 分の 1 を少年、12 分の 1 を青年
さらにその後は一生の 7 分の 1 を独身で過ご
した。
結婚してから 5 年後に子供が生まれ
その子は父の一生の半分だけ生き、
父はその子の死の 4 年後にこの世を去った。

ディオファントスは何歳まで生きた？

x 歳まで生きたとすると

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4 = x$$

$$84\times\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4\right) = x\times 84$$

$$14x+7x+12x+420+42x+336 = 84x$$

$$14x+7x+12x+420+42x+336 = 84x$$

$$-9x = -756$$

$$x = 84 \quad \boxed{\text{答}}$$

全ての素数を生み出す式（26 変数の 25 次式）

$$
\begin{aligned}
(k+2)\{1&-(wz+h+j-q)^2-((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2\\
&-(2n+p+q+z-e)^2-(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2)^2\\
&-(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2-((a^2-1)y^2+1-x^2)^2\\
&-(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2)^2-(n+\ell+v-y)^2\\
&-((a^2-1)\ell^2+1-m^2)^2-(ai+k+1-\ell-i)^2\\
&-(((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2)^2\\
&-(p+\ell(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m)^2\\
&-(q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x)^2\\
&-(z+p\ell(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm)^2\}
\end{aligned}
$$

番組中では書き間違っていた（論文が正しいハズだ）

参考 URL

https://p.1yen.jp/talk/formula.html ▸web

https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/JonesSatoWadaWiens.pdf ▸web