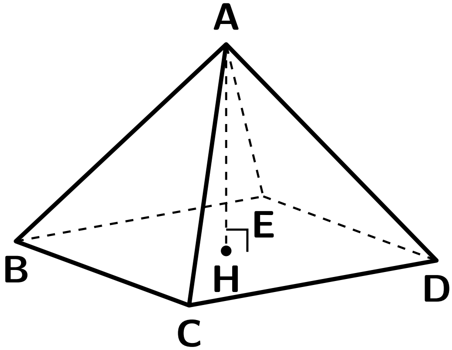
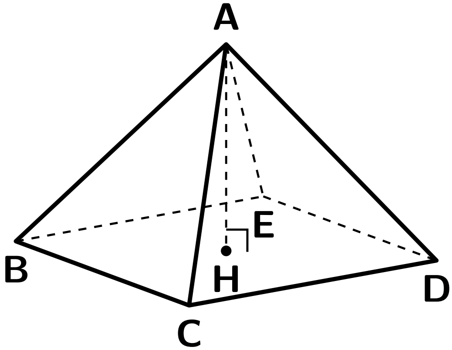


左図のように、すべての辺の長さが $4\,\mathrm{cm}$ の正四角錐 A-BCDE がある。頂点 A から正方形 BCDE におろした垂線を AH とするとき、次の各問いに答えなさい。

問題　（中学生向け）



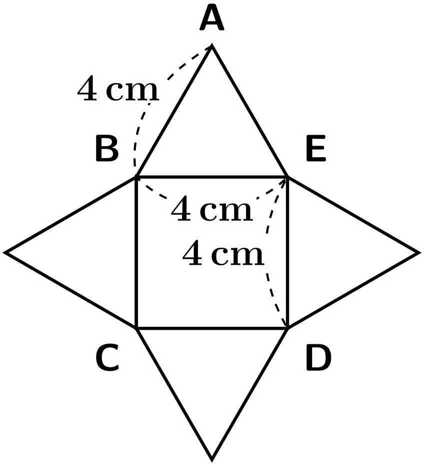
⑴ 正四角錐 A-BCDE の表面積を求めなさい。

⑵ AH の長さを求めなさい。

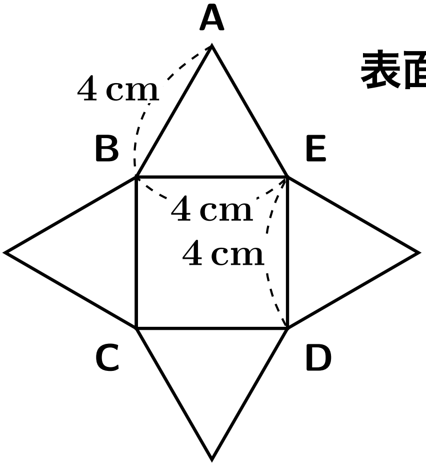
⑶ 正四角錐 A-BCDE の体積を求めなさい。

⑷ 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積を求めなさい。

⑴ 正四角錐 A-BCDE の表面積を求めなさい。

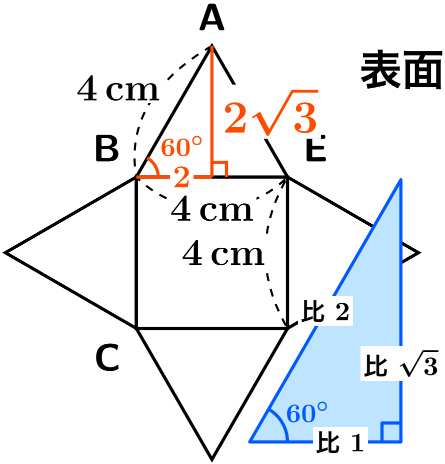


(1) 正四角錐 A-BCDE の表面積を求めなさい。



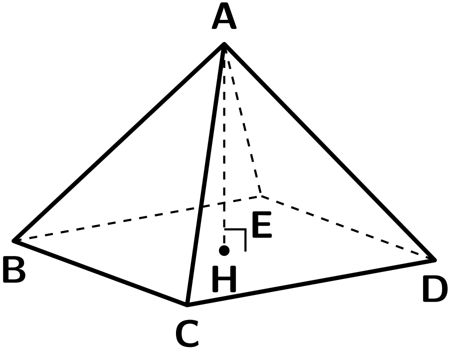
表面積 $=$ 正方形 $+$ $4 \times$ 正三角形

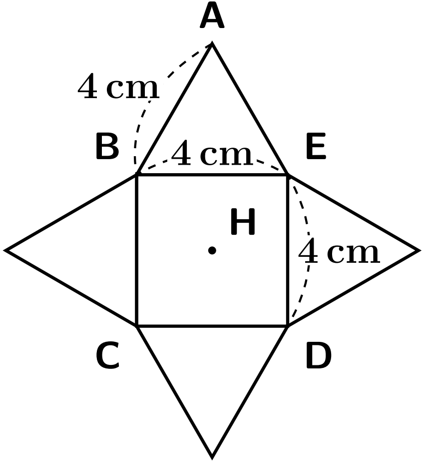
(1) 正四角錐 A-BCDE の表面積を求めなさい。



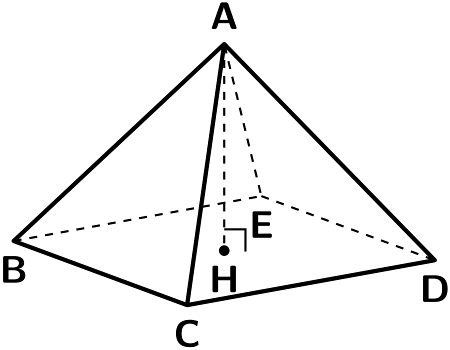
$$
\begin{aligned}
\text{表面積} &= \text{正方形} + 4\times\text{正三角形} \\
&= 4\times4 + 4\times4\times2\sqrt{3}\div2 \\
&= 16 + 16\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)
\end{aligned}
$$
答

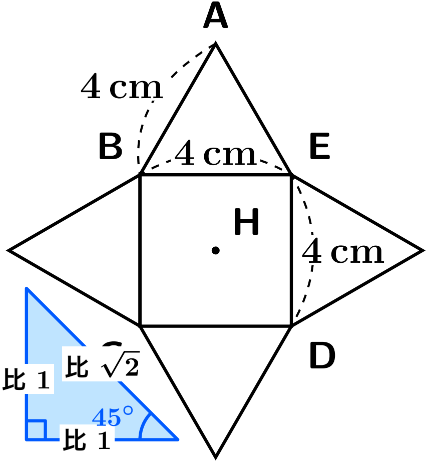
⑵ AH の長さを求めなさい。



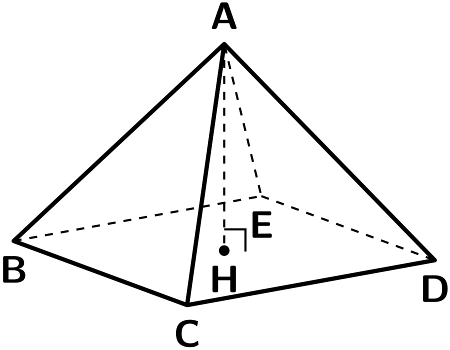


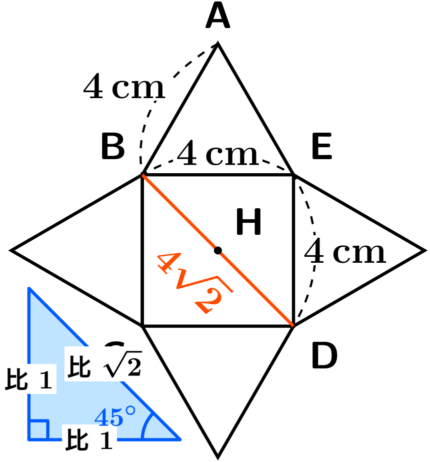
⑵ AH の長さを求めなさい。





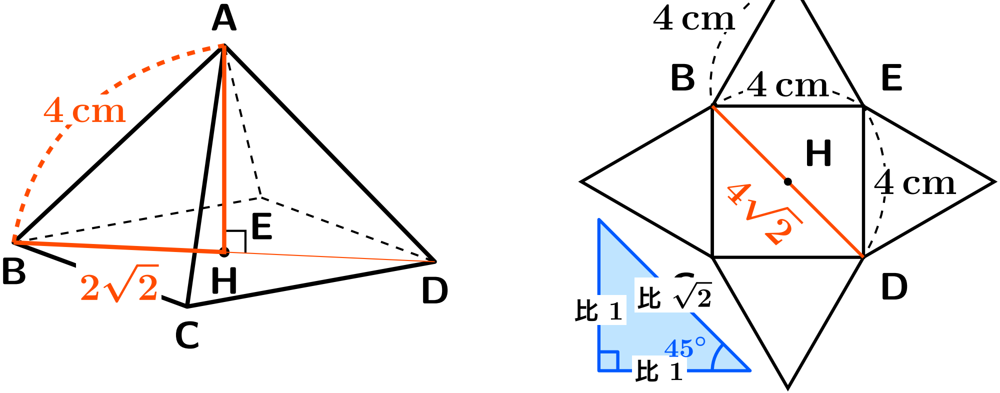
⑵ AHの長さを求めなさい。





(2) AH の長さを求めなさい。

$$(2\sqrt{2})^2 + \mathbf{AH}^2 = 4^2$$



⑵ AH の長さを求めなさい。

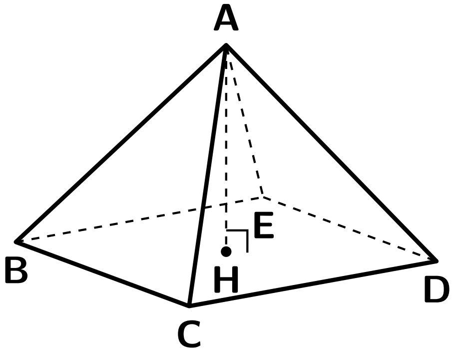
$$
\begin{aligned}
(2\sqrt{2})^2 + \mathrm{AH}^2 &= 4^2 \\
8 + \mathrm{AH}^2 &= 16 \\
\mathrm{AH}^2 &= 8
\end{aligned}
$$

AH > 0 より

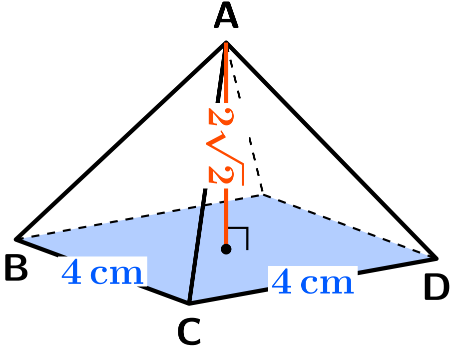
$$
\begin{aligned}
\mathrm{AH} &= \sqrt{8} \\
\mathrm{AH} &= 2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})
\end{aligned}
$$

答

⑶ 正四角錐 A-BCDE の体積を求めなさい。



⑶ 正四角錐 A-BCDE の体積を求めなさい。

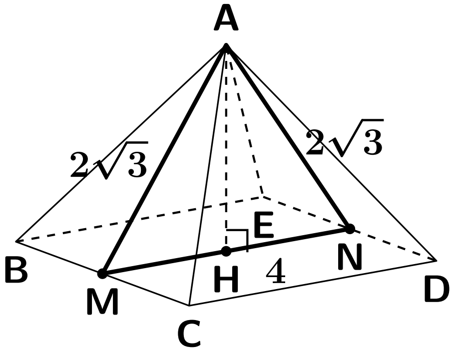


$$\text{体積} = \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$$

$$= \frac{1}{3} \times 16 \times 2\sqrt{2}$$

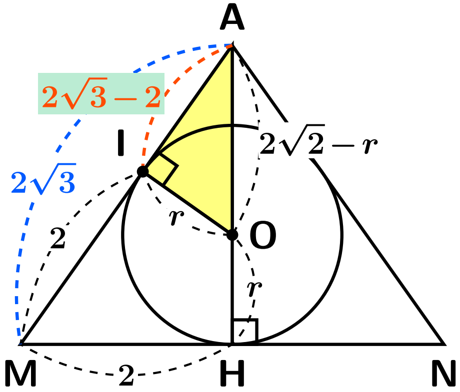
$$= \frac{32\sqrt{2}}{3} \ (\mathrm{cm}^3)$$ 答

⑷ 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？



BC の中点を M、DE の中点を N とすると、断面図 △AMN は次のようになる。

⑷ 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？



球の中心を O、球と △ABC の接点を I、球の半径を r cm とすると左図のようになるので、△AIO で三平方の定理を使って

$$(2\sqrt{3}-2)^2+r^2=(2\sqrt{2}-r)^2$$

⑷ 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？

$$
\begin{aligned}
(2\sqrt{3}-2)^2 + r^2 &= (2\sqrt{2}-r)^2 \\
(2\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{3} + 4 + r^2 &= (2\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}\,r + r^2 \\
12 - 8\sqrt{3} + 4 + \cancel{r^2} &= 8 - 4\sqrt{2}\,r + \cancel{r^2} \\
16 - 8\sqrt{3} &= 8 - 4\sqrt{2}\,r \\
4\sqrt{2}\,r &= 8\sqrt{3} - 8 \\
\sqrt{2}\,r &= 2\sqrt{3} - 2 \\
r &= \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

一旦停止

(4) 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？

球の表面積 ▸web

$$= 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 4\pi\cdot\frac{(2\sqrt{3}-2)^2}{\sqrt{2}^2} = 4\pi\cdot\frac{(2\sqrt{3})^2-8\sqrt{3}+4}{2}$$

$$= 4\pi\cdot\frac{12-8\sqrt{3}+4}{2} = 2\pi(16-8\sqrt{3})$$

⑷ 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？

$$= 2\pi(16 - 8\sqrt{3})$$

$$= 32\pi - 16\sqrt{3}\pi \ (\mathrm{cm}^2)$$ 答

⑷ が解ける中学生は、そんなにはいないぞ…