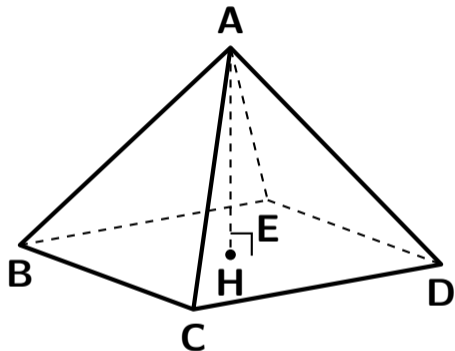
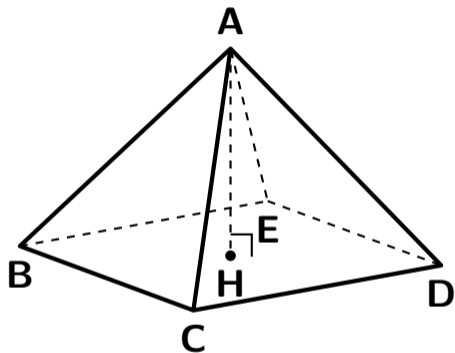


問題 (中学生向け)



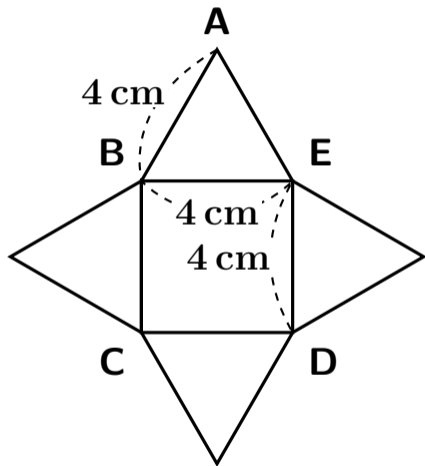
左図のように、すべての辺の長さが 4 cm の正四角錐 $A\text{-}BCDE$ がある。頂点 A から正方形 $BCDE$ におろした垂線を AH とするとき、次の各問いに答えなさい。

問題 (中学生向け)

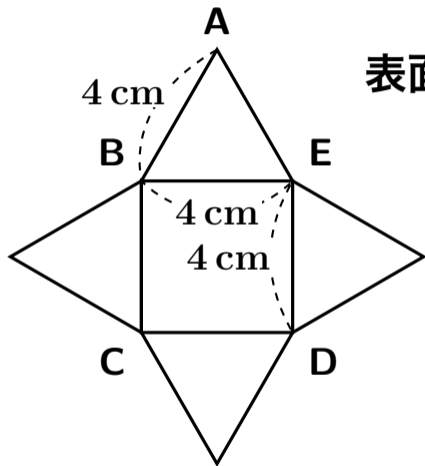


- (1) 正四角錐 $A-BCDE$ の表面積を求めなさい。
- (2) AH の長さを求めなさい。
- (3) 正四角錐 $A-BCDE$ の体積を求めなさい。
- (4) 正四角錐 $A-BCDE$ に内接する球の表面積を求めなさい。

(1) 正四角錐 A-BCDE の表面積を求めなさい。

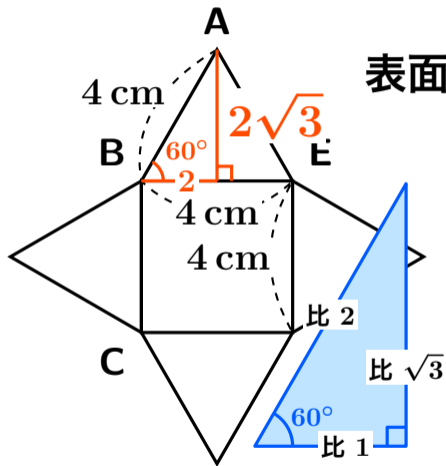


(1) 正四角錐 A-BCDE の表面積を求めなさい。



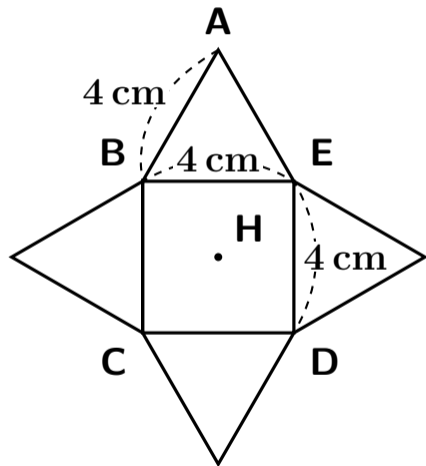
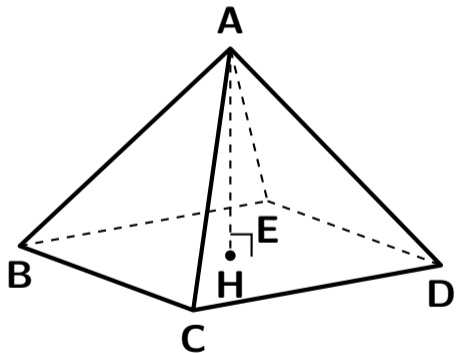
表面積 = 正方形 + 4 × 正三角形

(1) 正四角錐 A-BCDE の表面積を求めなさい。

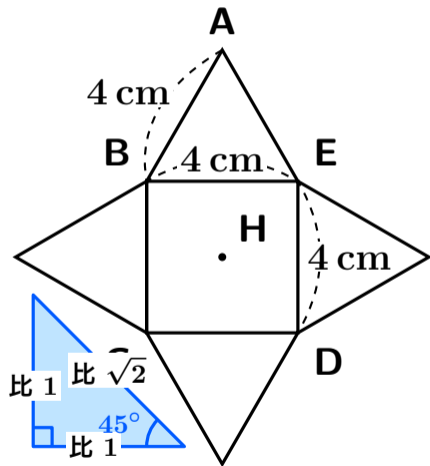
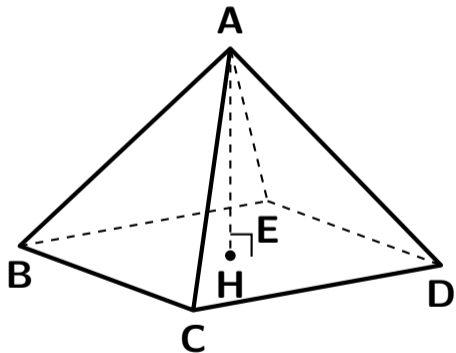


$$\begin{aligned}\text{表面積} &= \text{正方形} + 4 \times \text{正三角形} \\ &= 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 2\sqrt{3} \div 2 \\ &= 16 + 16\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \quad \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$

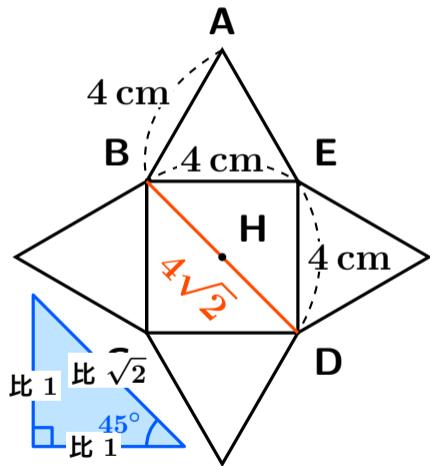
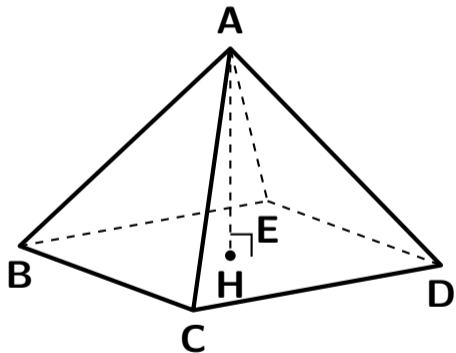
(2) AH の長さを求めなさい。



(2) AH の長さを求めなさい。

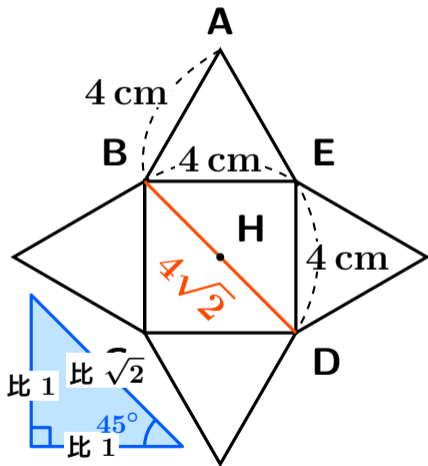
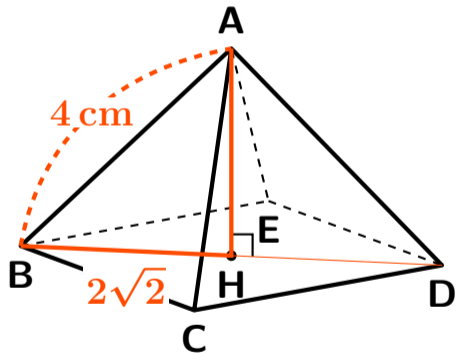


(2) AH の長さを求めなさい。



(2) AH の長さを求めなさい。

$$(2\sqrt{2})^2 + AH^2 = 4^2$$



(2) AH の長さを求めなさい。

$$(2\sqrt{2})^2 + AH^2 = 4^2$$

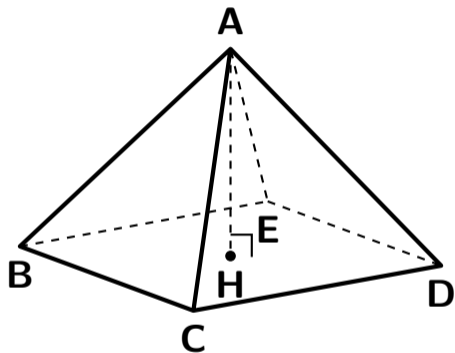
$$8 + AH^2 = 16$$

$$AH^2 = 8$$

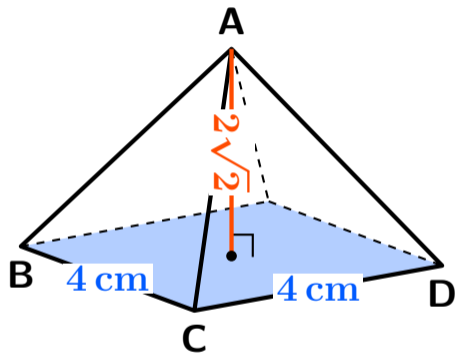
$$AH > 0 \text{ より } AH = \sqrt{8}$$

$$AH = 2\sqrt{2} \text{ (cm) } \boxed{\text{答}}$$

(3) 正四角錐 $A-BCDE$ の体積を求めなさい。

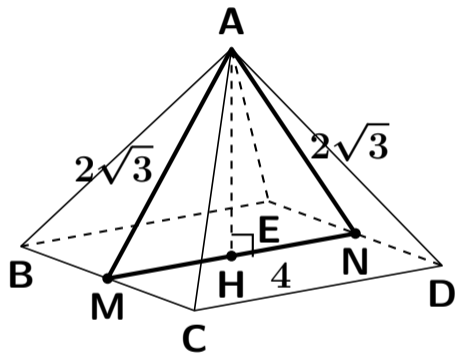


(3) 正四角錐 A-BCDE の体積を求めなさい。



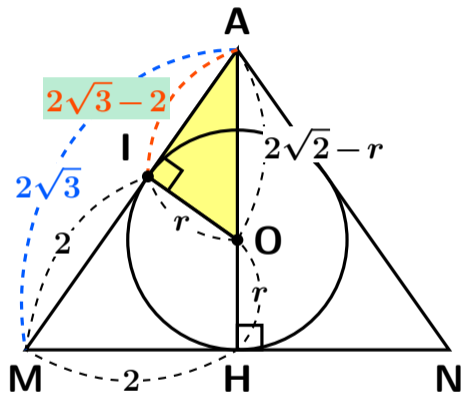
$$\begin{aligned}\text{体積} &= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ} \\ &= \frac{1}{3} \times 16 \times 2\sqrt{2} \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)} \quad \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$

(4) 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？



BC の中点を M、DE の中点を N とすると、断面図 $\triangle AMN$ は次のようになる。

(4) 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？



球の中心を O、球と $\triangle ABC$ の接点を I、球の半径を r cm とすると左図のようになるので、 $\triangle AIO$ で三平方の定理を使って

$$(2\sqrt{3}-2)^2 + r^2 = (2\sqrt{2}-r)^2$$

(4) 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3}-2)^2 + r^2 &= (2\sqrt{2}-r)^2 \\ (2\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{3} + 4 + r^2 &= (2\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}r + r^2 \\ 12 - 8\sqrt{3} + 4 + \cancel{r^2} &= 8 - 4\sqrt{2}r + \cancel{r^2} \\ 16 - 8\sqrt{3} &= 8 - 4\sqrt{2}r \\ 4\sqrt{2}r &= 8\sqrt{3} - 8 \\ \sqrt{2}r &= 2\sqrt{3} - 2 \\ r &= \frac{2\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}} \quad \text{一旦停止}\end{aligned}$$

(4) 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？

$$\begin{aligned} \text{球の表面積} & \text{web} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ & = 4\pi \cdot \frac{(2\sqrt{3}-2)^2}{\sqrt{2}^2} = 4\pi \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{3} + 4}{2} \\ & = 4\pi \cdot \frac{12 - 8\sqrt{3} + 4}{2} = 2\pi(16 - 8\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(4) 正四角錐 A-BCDE に内接する球の表面積？

$$= 2\pi(16 - 8\sqrt{3})$$

$$= 32\pi - 16\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)} \quad \boxed{\text{答}}$$

(4) が解ける中学生は、そんなにはいないぞ…