前置き

今から 2 行 2 列の行列の場合の説明をします。

※ 3 行 3 列や、4 行 4 列の場合も同様な考え方はできます。

零行列

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を**零行列**といいます。零行列はたし算やひき算をしても、元の行列のままです。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

単位行列

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を**単位行列**といいます。単位行列はかけ算をしても、元の行列のままです。

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times1+2\times0 & 3\times0+2\times1 \\ 1\times1+4\times0 & 1\times0+4\times1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

単位行列

単位行列は左右どちらからかけ算をしても、元の行列のままです。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3+0\times 1 & 1\times 2+0\times 4 \\ 0\times 3+1\times 1 & 0\times 2+1\times 4 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}
$$

行列のスカラー倍

$$2\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times 3 & 2\times 2\\2\times 1 & 2\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\2 & 8\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times 3 & \frac{1}{2}\times 2\\\frac{1}{2}\times 1 & \frac{1}{2}\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$$

逆行列

かけ算すると単位行列になる行列を**逆行列**といいます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & ? & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるのは何かというと

$$\begin{pmatrix} & ? & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

です（解説は後で）

逆行列

かけ算すると単位行列になるか確認しましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times(-2)+2\times\frac{3}{2} & 1\times1+2\times(-\frac{1}{2}) \\ 3\times(-2)+4\times\frac{3}{2} & 3\times1+4\times(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列のことを $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ とかくので

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とかきます。

2 行 2 列の場合、逆行列を求める公式があります。

逆行列の公式（ただし $ad-bc \neq 0$）

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4-2\cdot 3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

計算してみよう

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot 3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{-2}\times 4 & \frac{1}{-2}\times(-2) \\ \frac{1}{-2}\times(-3) & \frac{1}{-2}\times 1 \end{pmatrix}$$

計算してみよう

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-2} \times 4 & \frac{1}{-2} \times (-2) \\ \frac{1}{-2} \times (-3) & \frac{1}{-2} \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{答}}$$

$ad-bc=0$ のときは逆行列がありません

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4-2\cdot 2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

分母が 0 はダメ