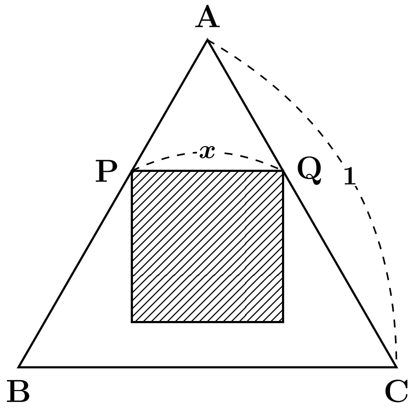
共通部分の面積の最大値？　20 中央大、経済 2

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC において、辺 BC に平行な直線が 2 辺 AB,AC と交わる点をそれぞれ P,Q とする。PQ を 1 辺とし、A と反対側にある正方形と $\triangle$ABC との共通部分の面積を y とする。PQ の長さを x とするとき

(1)　y を x を用いて表せ。

(2)　y の最大値を求めよ。

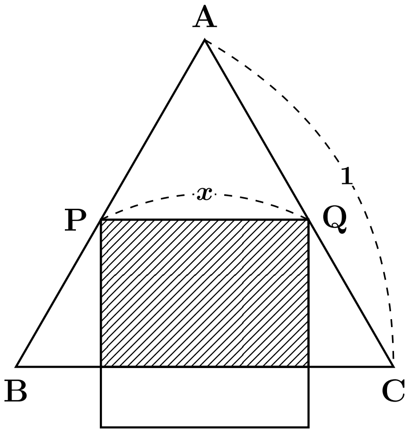


共通部分の面積の最大値？　20 中央大、経済 2

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC において、辺 BC に平行な直線が 2 辺 AB,AC と交わる点をそれぞれ P,Q とする。PQ を 1 辺とし、A と反対側にある正方形と △ABC との共通部分の面積を y とする。PQ の長さを x とするとき

(1)　y を x を用いて表せ。

(2)　y の最大値を求めよ。



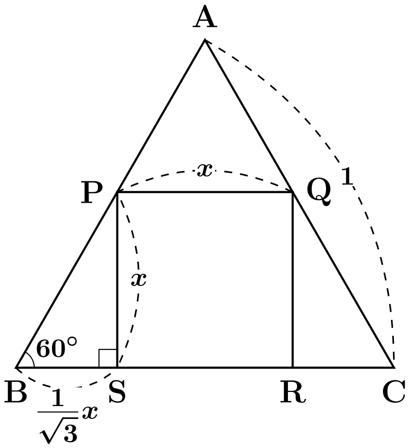
境目を考える

境目は右図のようになる。

$\mathrm{BS} : \mathrm{SP} = 1 : \sqrt{3}$ なので

$$\begin{aligned} \mathrm{BS} : x &= 1 : \sqrt{3} \\ \sqrt{3}\,\mathrm{BS} &= x \\ \mathrm{BS} &= \frac{1}{\sqrt{3}}x \end{aligned}$$

同様に $\mathrm{CR} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$



境目を考える

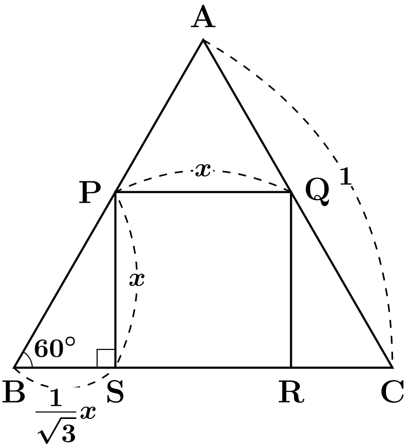
よって

$$\mathrm{BC}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}x+x=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x$$

$\mathrm{BC}=1$ より

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x = 1$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$



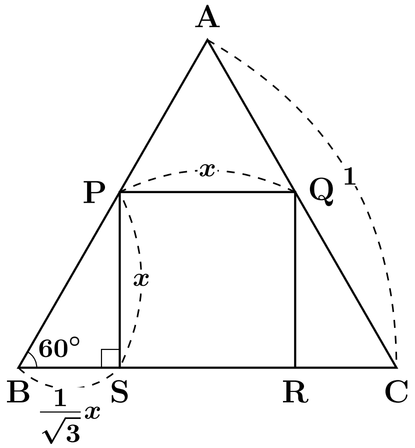
境目を考える

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$x = 2\sqrt{3}-3$$

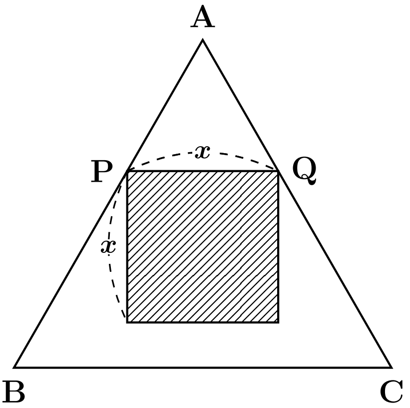
一旦停止



境目は　$x=2\sqrt{3}-3$

(i) $0<x\leqq 2\sqrt{3}-3$ のとき

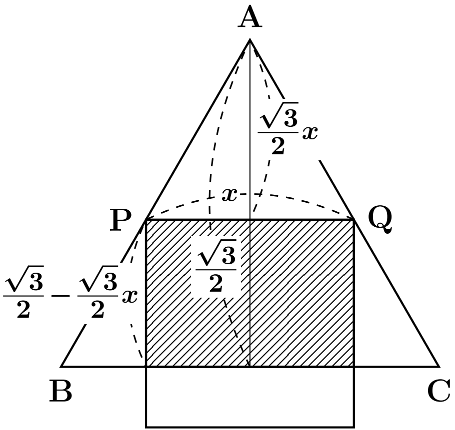
$$y=x^2$$



境目は　$x = 2\sqrt{3} - 3$

(ii) $2\sqrt{3}-3 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$



境目は　$x = 2\sqrt{3} - 3$

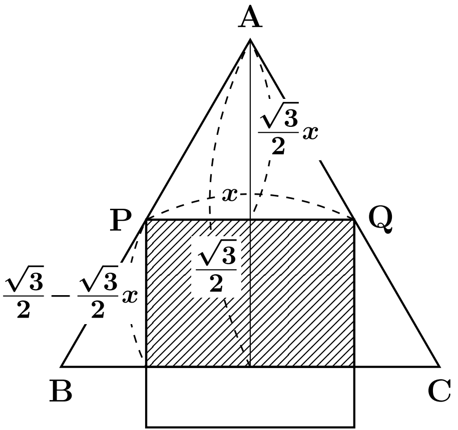
まとめると

(i) $0 < x \leqq 2\sqrt{3} - 3$ のとき

$$y = x^2 \quad \boxed{答}$$

(ii) $2\sqrt{3} - 3 < x < 1$ のとき

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \boxed{答}$$



⑵　y の最大値を求めよ

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2-x\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

(ii)を平方完成

⑵　y の最大値を求めよ

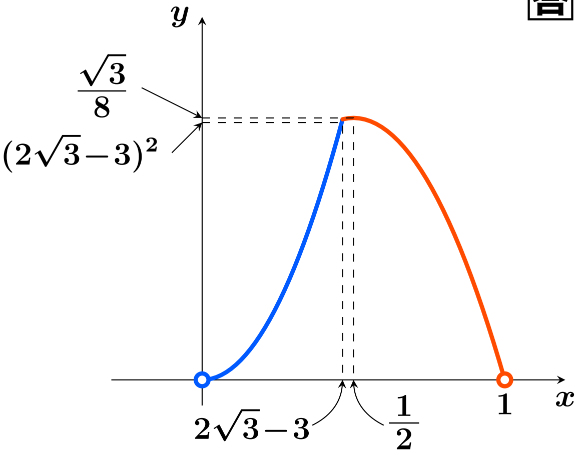
$\frac{1}{2}$ と $2\sqrt{3}-3$ の大小関係を調べる必要がある。

$$\frac{1}{2}-(2\sqrt{3}-3) = \frac{1-4\sqrt{3}+6}{2} = \frac{7-4\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{2} > 0$$

よって $\frac{1}{2} > 2\sqrt{3}-3$ なので

⑵　y の最大値を求めよ



答　$x = \frac{1}{2}$ のとき

最大値 $\frac{\sqrt{3}}{8}$