交代式とは

$a-b$ の a, b を入れ替えると $b-a$ になります。このとき

$$b-a=-(a-b)=-(\text{元の式})$$

です。このような式を交代式といいます。

他の例として　$ab(a^2-b^2)$　も交代式です。

交代式についての定理

定理　a, b の交代式は、因数分解すると必ず
$(a-b) \times ($式 または 数字$)$　の形になる

さっきの例だと

$$ab(a^2-b^2) = ab(a+b)(a-b)$$

となるので $(a-b) \times ab(a+b)$ の形です。

a, b, c の交代式

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ は、3 つの文字を含む交代式です。a, b を入れ替えると

$$
\begin{aligned}
& b^2(a-c)+a^2(c-b)+c^2(b-a) \\
=\ & -b^2(c-a)-a^2(b-c)-c^2(a-b) \\
=\ & -a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b) \\
=\ & -\left(a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\right)
\end{aligned}
$$

となるからです。

交代式について定理その 2

さっきの式は b, c を入れ替えても、c, a を入れ替えても交代式になります。3 つの文字を含む交代式では、次の定理が成り立ちます。

定理 a, b, c の交代式は、因数分解すると必ず

$(a-b)(b-c)(c-a) \times ($式 または 数字$)$

の形になる

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ の因数分解

さっきの定理から

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)\times(\text{式 または 数字})$$

のはずですが、a^2 の部分に注目すると

$$a^2(b-c)+\cdots \quad =-(b-c)a^2\cdots\times(\text{式 または 数字})$$

なので (式 または 数字) $=-1$ だと分かります。だから

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$

$$=\quad(a-b)(b-c)(c-a)\times(-1)$$

$$=-(a-b)(b-c)(c-a)$$ 答　となります。

正解にしてもらえないかも

これらのことは教科書には書かれていないので、定期テストでこのような解答を書いても正解として認めてもらえないと思われます。

解く前に答えを予想した上で（教科書どおりに）**最低次数の文字について整理**して、予想通りの答えになることを確認する使い方がベストです。