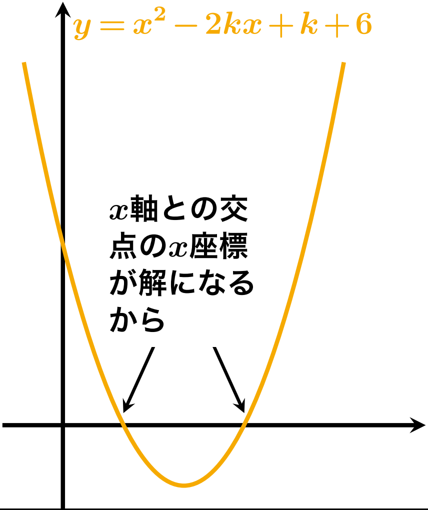
定数 k の値の範囲？

問題

$x^2-2kx+k+6=0$ が
異なる 2 つの正の解をもつような、
定数 k の値の範囲を求めなさい。

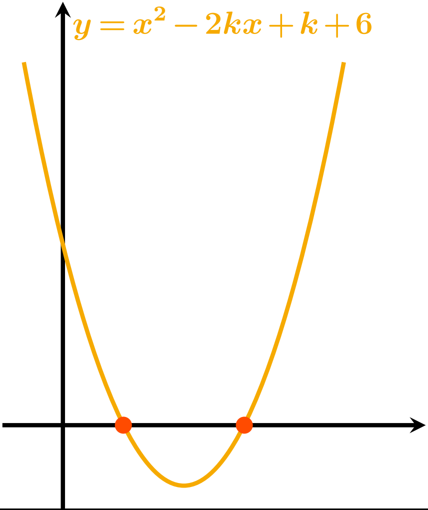
$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解



グラフが、こんな感じになればよい。

こうなるための条件は…

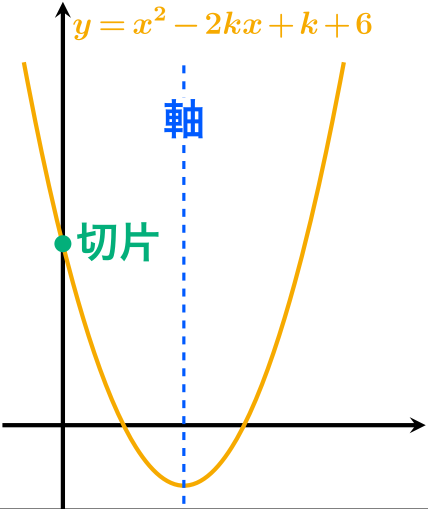
$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解



異なる 2 つの実数解をもつので

① 判別式 $D>0$

$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解



2 つの正の解をもつための条件は

② 放物線の軸 >0
③ 切片 >0

条件①②③が全部そろえばよいので

$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

① 判別式 $D>0$ となるには

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

$$(-2k)^2 - 4\times 1\times(k+6) > 0$$

$$4k^2 - 4k - 24 > 0$$

$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

① 判別式 $D>0$ となるには

$$
\begin{aligned}
D = b^2 - 4ac &> 0 \\
(-2k)^2 - 4\times 1\times(k+6) &> 0 \\
4k^2 - 4k - 24 &> 0 \quad \text{両辺} \div 4 \\
k^2 - k - 6 &> 0 \\
(k+2)(k-3) &> 0
\end{aligned}
$$

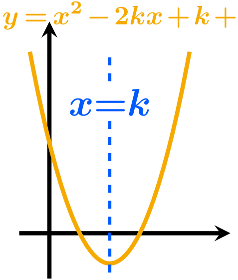
$$k<-2,\quad 3<k \quad \cdots①$$

$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

② 放物線の軸 >0 となるには

$$\begin{aligned} y &= x^2-2kx+k+6 \\ &= (x-k)^2-k^2+k+6 \end{aligned}$$

平方完成すると



より、軸は $x=k$ なので

$$k>0 \quad \cdots ②$$

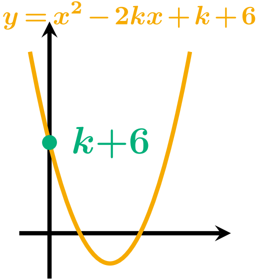
$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

③ 切片 >0 となるには

$f(x)=x^2-2kx+k+6$ とすると
$f(0)=k+6$ なので

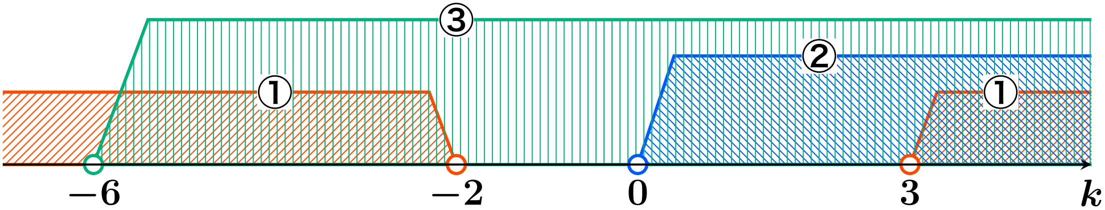
$k+6>0$ を計算して

$$k>-6 \quad \cdots ③$$



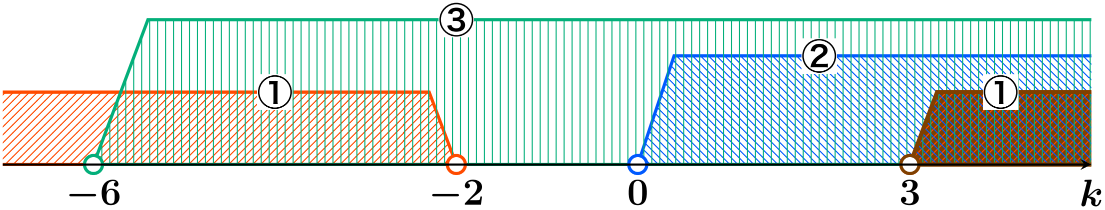
$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

3 つの範囲が重なる部分は



$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

3 つの範囲が重なる部分は



答　$k>3$　$(3<k$ でも OK$)$

$x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ が異なる 2 つの正の解

数学 II で学習する「解と係数の関係」を使って解くことも可能です。