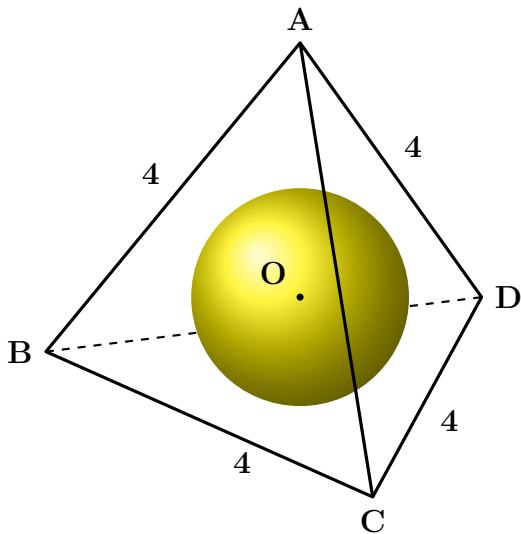


体積 V と内接する球の半径 r

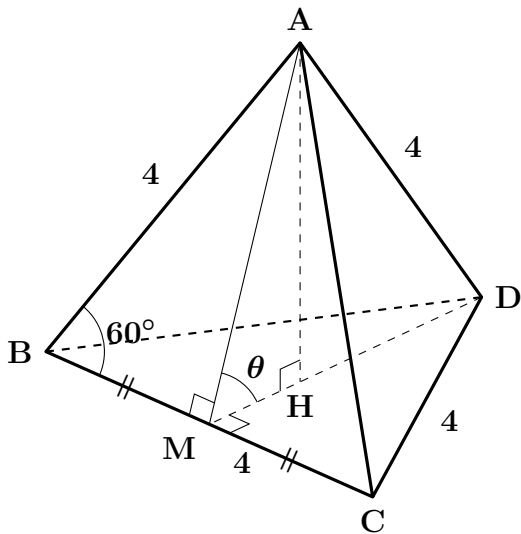


1 辺の長さが 4 である正四面体 ABCD について、次の問いに答えなさい。

- (1) 体積 V を求めなさい。
- (2) 内接する球 O の半径 r を求めなさい。

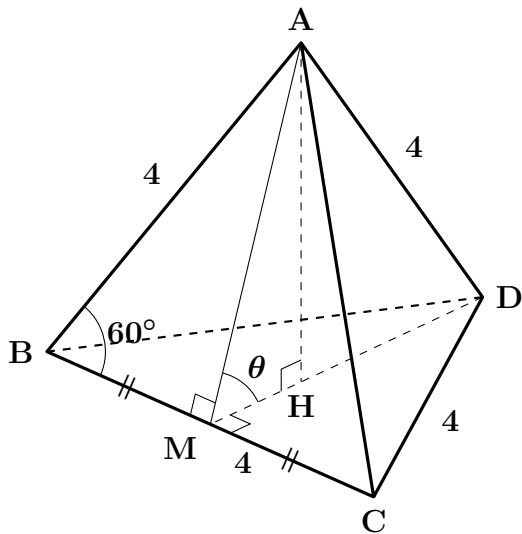
【出典】実教出版、スパイラル 数I 新訂版

体積 V と内接する球の半径 r



辺 BC の中点を M とする。
頂点 A から線分 DM に垂線 AH を下ろすと、 AH の長さは $\triangle BCD$ を底面としたときの正四面体の高さになる。
 $\triangle BCD$ は 1 辺 4 の正三角形で面積が求められるので、 AH の長さが分かればよい。

$$AM = 2\sqrt{3}$$



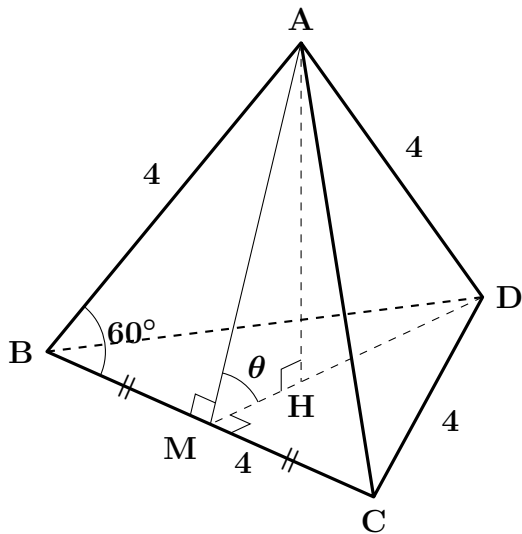
$\triangle ABM$ は辺の長さが $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形で $AB=4$ だから $AM=2\sqrt{3}$ となる。

$\angle AMD = \theta$ とすると

$$AH = AM \sin \theta$$

$\sin \theta$ を求めるために、
 $\triangle AMD$ で余弦定理を使って
 $\cos \theta$ を求める。

$$AM = 2\sqrt{3}$$



$AM = MD = 2\sqrt{3}$, $AD = 4$
より余弦定理 [web](#) を使って

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 4^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

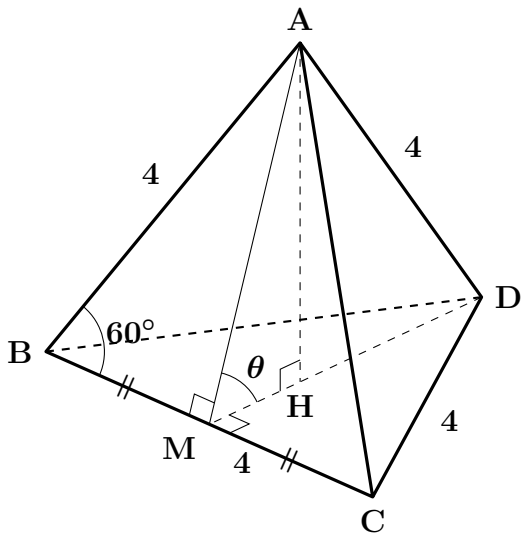
公式 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を変
形して $(\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta)$ 代入して

Diagram of a regular tetrahedron $ABCD$ with side length 4. The base is triangle BCD , and the apex is A . The height of the tetrahedron is the line segment AH , where H is the centroid of the base. The angle between the edge AC and the height AH is labeled θ . The angle between the edge AB and the base BC is labeled 60° . The height of the base triangle BCD is labeled M .

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

gbb60166

$$AM = 2\sqrt{3}, \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, AH = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \text{面積 } \triangle BCD = 4\sqrt{3}$$

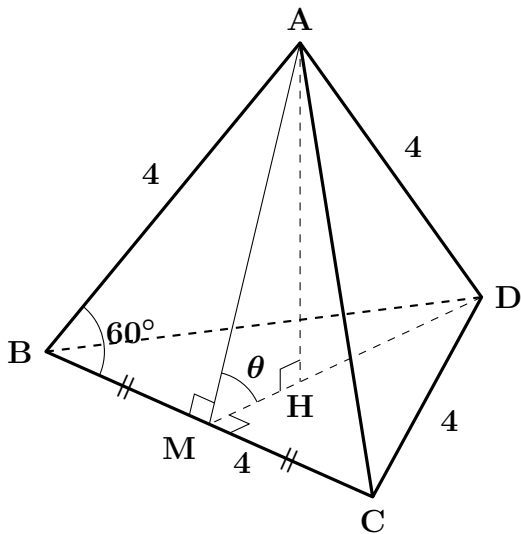


$$AH = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

次に 1 辺 4 の正三角形
 $\triangle BCD$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \text{底辺} \times \text{高さ} \div 2 \\ &= BC \times MD \div 2 \\ &= 4 \times 2\sqrt{3} \div 2 \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

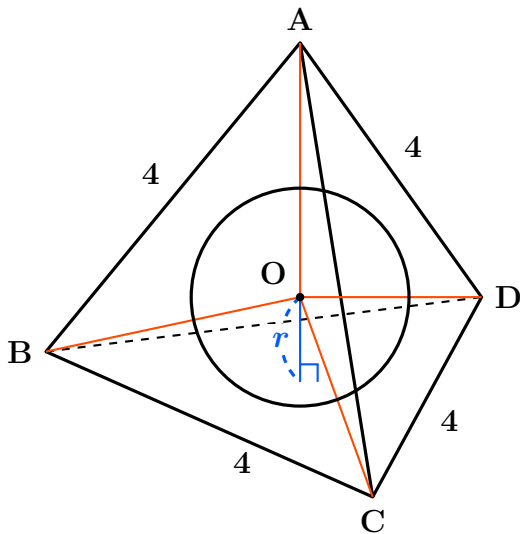
$$AM = 2\sqrt{3}, \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, AH = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \text{面積 } \triangle BCD = 4\sqrt{3}, V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$



よって体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ} \quad \text{web} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3} \quad \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$

$$AM=2\sqrt{3}, \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, AH=\frac{4\sqrt{6}}{3}, \text{面積 } \triangle BCD=4\sqrt{3}, V=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

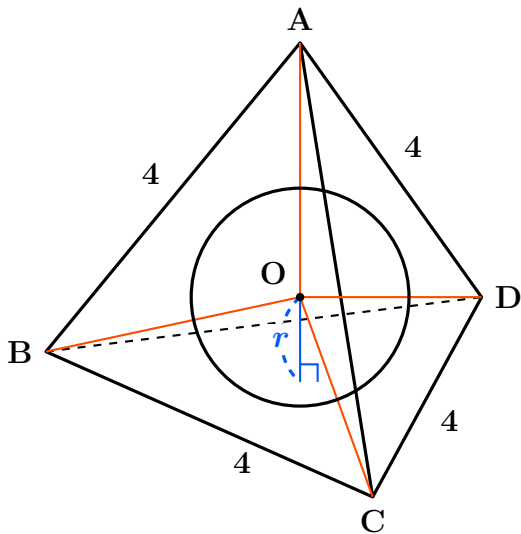


内接する球 O の半径 r は、
 $\triangle BCD$ を底面としたときの
 四面体 $OBCD$ の高さなので、
 その体積は

$$\frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot r = \frac{4\sqrt{3}}{3} r$$

となる。

$$AM=2\sqrt{3}, \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, AH=\frac{4\sqrt{6}}{3}, \text{面積 } \triangle BCD=4\sqrt{3}, V=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$



四面体 $OABC$, $OABD$,
 $OACD$ も同じ体積であり、
 4 つの四面体の体積を合計し
 たものは (1) で求めた正四面体
 $ABCD$ の体積なので

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} r \times 4 = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ より}$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \boxed{\text{答}}$$