# 問題

(1) $n$ が整数のとき、次を証明しなさい。

$n^2$ が $5$ の倍数　　ならば　　$n$ は $5$ の倍数

(2) $\sqrt{5}$ は無理数であることを示しなさい。

(3) $a, b$ が有理数のとき、次を証明しなさい。

$a+b\sqrt{5}=0$　　ならば　　$a=0$ かつ $b=0$

# (1)　$n^2$ が 5 の倍数　ならば　$n$ は 5 の倍数

$n^2$ が 5 の倍数　を式で表すと
$n^2 = 5k$ ($k$ は整数) となるが、これだと

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2} &= \pm\sqrt{5k} \\ n &= \pm\sqrt{5k} \end{aligned}$$

となって証明が難しそうなので、対偶かな？ と推測する。

# (1)　$n^2$ が 5 の倍数　ならば　$n$ は 5 の倍数

対偶の

$n$ が 5 の倍数でない　ならば
$n^2$ は 5 の倍数でない

の方が証明しやすそう。

そこで $n = 5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$ の場合を調べる（5 の倍数でないならば、必ずこの 4 パターンのどれかになるからね…）

# （i）$n=5k+1$ の場合

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+1)^2 \\ &= 25k^2+10k+1 \\ &= 5(5k^2+2k)+1 \end{aligned}$$

となるので

$n^2$ は 5 の倍数ではない

ことが証明できた（5 で割ると、あまりが 1）

# (ii)　$n=5k+2$ の場合

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+2)^2 \\ &= 25k^2+20k+4 \\ &= 5(5k^2+4k)+4 \end{aligned}$$

となるので

$n^2$ は 5 の倍数ではない

ことが証明できた（5 で割ると、あまりが 4）

# (iii)　$n=5k+3$ の場合

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (5k+3)^2 \\
&= 25k^2+30k+9 \\
&= 5(5k^2+6k+1)+4
\end{aligned}
$$

となるので

$n^2$ は 5 の倍数ではない

ことが証明できた（5 で割ると、あまりが 4）

# (iv)　$n=5k+4$ の場合

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (5k+4)^2 \\
&= 25k^2+40k+16 \\
&= 5(5k^2+8k+3)+1
\end{aligned}
$$

となるので

$n^2$ は 5 の倍数ではない

ことが証明できた（5 で割ると、あまりが 1）

# (1)　$n^2$ が 5 の倍数　ならば　$n$ は 5 の倍数

対偶の

$n$ が 5 の倍数でない　ならば
$n^2$ は 5 の倍数でない

が真なので、元の命題も真である。（証明終わり）

# ⑵　$\sqrt{5}$ は無理数であることを示しなさい

☞ 背理法で証明する

☞ ⑴ を利用する可能性あり
（誘導問題といいます）

# ⑵　$\sqrt{5}$ は無理数であることを示しなさい

$\sqrt{5}$ が有理数と仮定すると

$$\sqrt{5}=\frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素の整数で } p>0,\ q>0)$$

と表せる。よって

## ⑵　$\sqrt{5}$ は無理数であることを示しなさい

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5} &= \frac{p}{q} \\
\sqrt{5}q &= p \\
(\sqrt{5}q)^2 &= p^2 \\
\sqrt{5}^{\,2} q^2 &= p^2 \\
5q^2 &= p^2
\end{aligned}
$$

一旦停止

# $5q^2 = p^2$ ですよ！

$5q^2 = p^2$ ということは $p^2$ は $5$ の倍数なので、さっき (1) で証明したことより $p$ は $5$ の倍数となる。

だから $p = 5k$ ($k$ は正の整数) とおくと、先ほどの式 $5q^2 = p^2$ に代入して

## $p=5k$ を代入　　$5q^2=p^2$ ですよ！

$$\begin{aligned} 5q^2 &= p^2 \\ 5q^2 &= (5k)^2 \\ 5q^2 &= 25k^2 \\ q^2 &= 5k^2 \end{aligned}$$

**$q^2$ も 5 の倍数**なので、さっき (1) で証明したことより **$q$ も 5 の倍数**となる。

# $5q^2 = p^2$ ですよ！

$p$ も $q$ も $5$ の倍数となって、$p$, $q$ は互いに素であることに矛盾する。

よって $\sqrt{5}$ は無理数である。（証明終わり）

## ⑶　$a+b\sqrt{5}=0$　ならば　$a=0$ かつ $b=0$

☞ 背理法で証明する

☞ ⑵ を利用する可能性あり

# (3)　$a+b\sqrt{5}=0$　ならば　$a=0$ かつ $b=0$

$b \neq 0$ と仮定する。

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{5} &= 0 \\ b\sqrt{5} &= -a \\ \frac{\cancel{b}\sqrt{5}}{\cancel{b}} &= \frac{-a}{b} \\ \sqrt{5} &= \frac{-a}{b} \end{aligned}$$

## ⑶　$a+b\sqrt{5}=0$　ならば　$a=0$ かつ $b=0$

さっき ⑵ で証明したことより $\sqrt{5}$ は無理数である。しかし $\dfrac{-a}{b}$ は有理数なので

$$\sqrt{5} = \frac{-a}{b}$$

無理数 ＝ 有理数

となり矛盾するので $b=0$ である。

## ⑶　$a+b\sqrt{5}=0$ ならば　$a=0$ かつ $b=0$

$b=0$ を $a+b\sqrt{5}=0$ に代入すると
$a+0\sqrt{5}=0$ となって $a=0$ になる。

よって $a=0$ かつ $b=0$ になる。（証明終わり）