$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき、次の式の値を求めなさい

(1) $x+\frac{1}{x}$　　(2) $x^2+\frac{1}{x^2}$　　(3) $x^2-\frac{1}{x^2}$

(4) $x^4+\frac{1}{x^4}$　　(5) $x^4-\frac{1}{x^4}$

対称式、**交代式**の問題です。

まず事前準備として $\frac{1}{x}$ を計算します。

$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 事前準備の計算中

$$\frac{1}{x} = \frac{1 \times 2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \times 2} = \frac{2}{3-\sqrt{5}}$$ 有理化する

$$= \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{3^2-\sqrt{5}^2}$$

$$= \frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{\cancel{2}(3+\sqrt{5})}{\cancel{4}_2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

一旦停止

$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ だよ

(1) $$x+\frac{1}{x} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$= \frac{3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}}{2}$$
$$= \frac{6}{2}$$
$$= 3$$ 答

$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{x}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x+\frac{1}{x}=3$ だよ

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ ←よく出てくる

$=3^2-2$

$=9-2=7$ 答

$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{x}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x+\frac{1}{x}=3, x^2+\frac{1}{x^2}=7$

(3) $x^2-\frac{1}{x^2}$ の事前準備で $x-\frac{1}{x}$ を計算します。

$$x-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}-(3+\sqrt{5})}{2}$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}-3-\sqrt{5}}{2}=\frac{-2\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$$

一旦停止

$x+\frac{1}{x}=3,\quad x^2+\frac{1}{x^2}=7,\quad x-\frac{1}{x}=-\sqrt{5}$

(3) $x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=3\cdot(-\sqrt{5})$

$=-3\sqrt{5}$ 答

(4) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2$

$=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2$

$=7^2-2=47$ 答

$x^2+\frac{1}{x^2}=7,\ x^2-\frac{1}{x^2}=-3\sqrt{5}$

(5) $$x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=7\cdot(-3\sqrt{5})$$
$$=-21\sqrt{5}$$ 答

他にこんなのもよく出るよ

$$x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$x^3-\frac{1}{x^3} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

他にこんなのもよく出るよ

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$