

# 問題

$$|x^2 + ax + 2a| = a$$

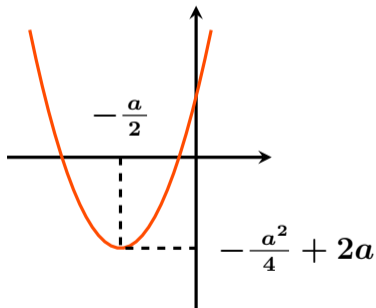
(ただし  $a$  は正の実数)

が異なる実数解を、ちょうど 2 個もつような  $a$  の値の範囲を求めなさい。

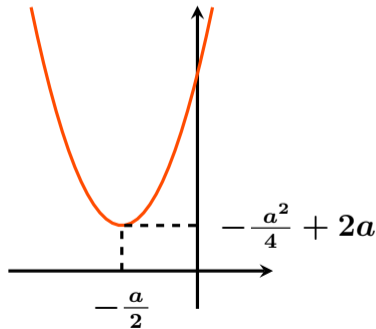
# 解答

$y = x^2 + ax + 2a$  とおくと

$y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2a$  となるので、グラフは

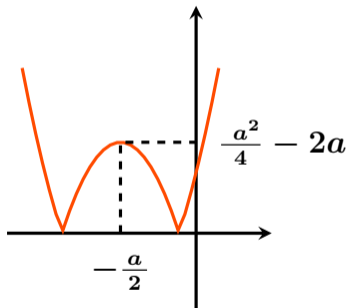


または

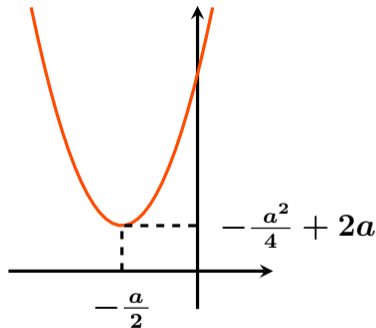


$|x^2 + ax + 2a| = a$  が異なる 2 個の実数解

だから  $y = |x^2 + ax + 2a|$  のグラフは

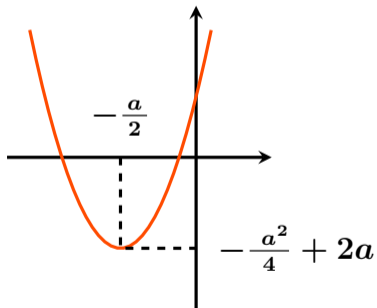


または

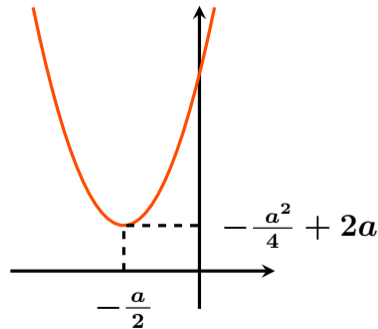


$|x^2 + ax + 2a| = a$  が異なる 2 個の実数解

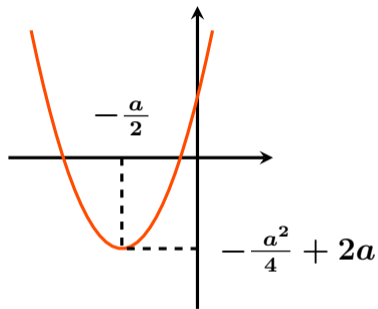
問題に絶対値が付くので、頂点の  $y$  座標が  
 $< 0$ ,  $> 0$ ,  $= 0$  で事情が変わるから場合分け！



または



(i)  $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$  のとき



となるが、

$$-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$$

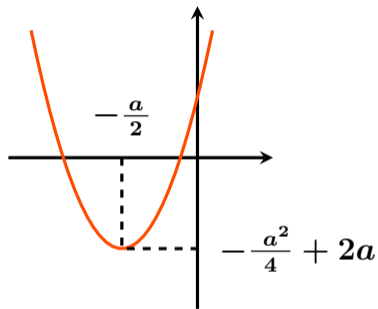
$$\frac{a^2}{4} - 2a > 0$$

$$a^2 - 8a > 0$$

$$a(a - 8) > 0$$

$$a < 0, 8 < a$$

(i)  $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$  のとき ( $a > 8$ )



$$-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$$

$$\frac{a^2}{4} - 2a > 0$$

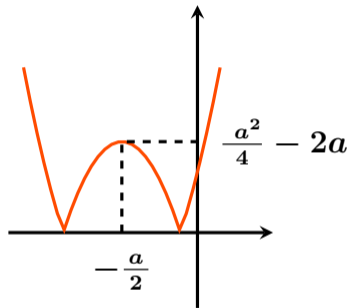
$$a^2 - 8a > 0$$

$$a(a - 8) > 0$$

$$a < 0, 8 < a$$

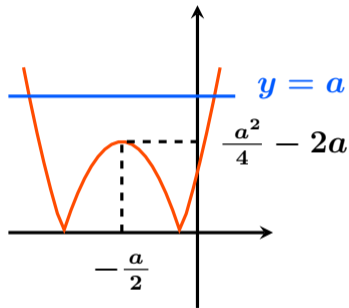
となるが、問題の条件に「 $a$  は正の実数」と書かれているので  $a > 8$  となる。

(i)  $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$  のとき ( $a > 8$ )



このとき  $y = |x^2 + ax + 2a|$   
のグラフは図のようになる。

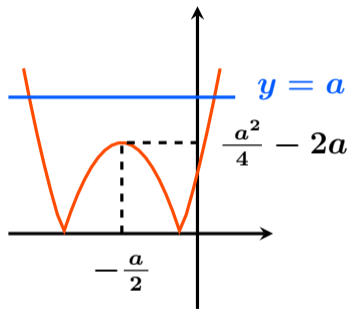
(i)  $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$  のとき ( $a > 8$ )



$y = a$  との交点が 2 個になるには、左のようになればよい。

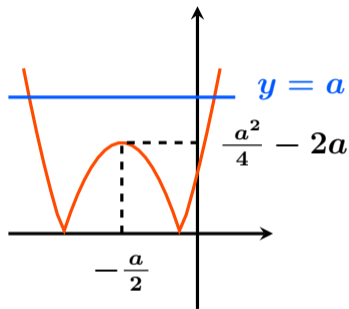


(i)  $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$  のとき ( $a > 8$ )



よって  $\frac{a^2}{4} - 2a < a$  なら OK

(i)  $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$  のとき ( $a > 8$ )



よって  $\frac{a^2}{4} - 2a < a$  なら OK

$$a^2 - 8a < 4a$$

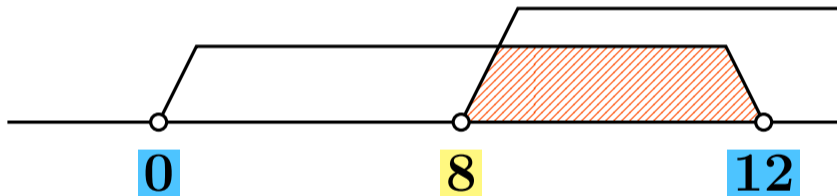
$$a^2 - 12a < 0$$

$$a(a - 12) < 0$$

$$0 < a < 12$$

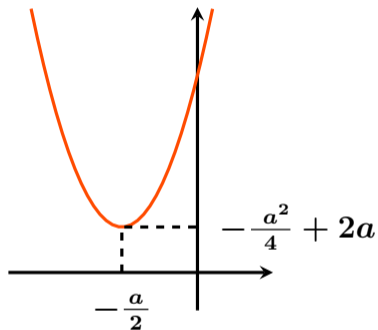
(i)  $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$  のとき ( $a > 8$ )

$a > 8$  と  $0 < a < 12$  より



まとめると  $8 < a < 12$  ……①

(ii)  $-\frac{a^2}{4} + 2a > 0$  のとき



$$-\frac{a^2}{4} + 2a > 0$$

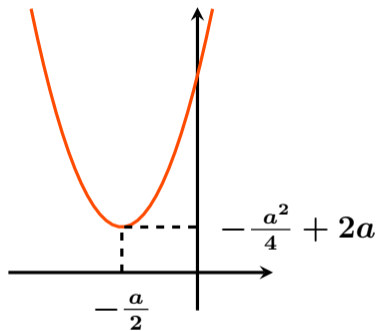
$$\frac{a^2}{4} - 2a < 0$$

$$a^2 - 8a < 0$$

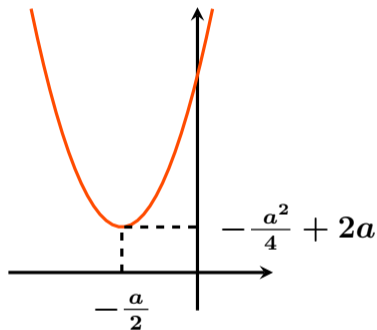
$$a(a - 8) < 0$$

$$0 < a < 8$$

(ii)  $-\frac{a^2}{4} + 2a > 0$  のとき ( $0 < a < 8$ )

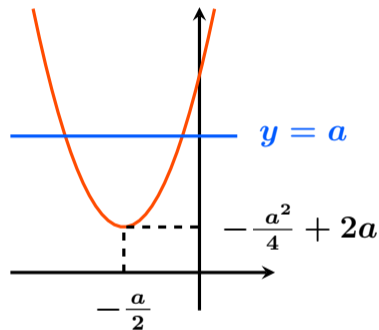


(ii)  $-\frac{a^2}{4} + 2a > 0$  のとき ( $0 < a < 8$ )



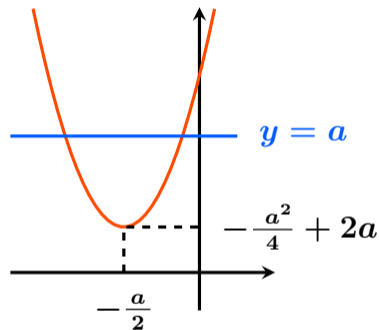
このとき  $y = |x^2 + ax + 2a|$   
のグラフは図のようになる。

(ii)  $-\frac{a^2}{4} + 2a > 0$  のとき ( $0 < a < 8$ )



だから  $y = a$  との交点が 2 個になるには、左のようになればよい。

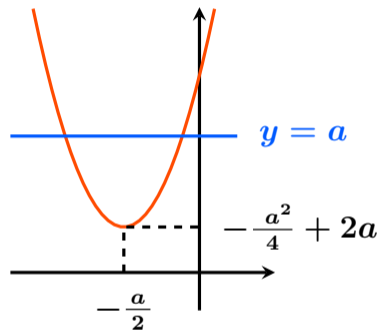
(ii)  $-\frac{a^2}{4} + 2a > 0$  のとき ( $0 < a < 8$ )



よって  $-\frac{a^2}{4} + 2a < a$  なら  
OK



(ii)  $-\frac{a^2}{4} + 2a > 0$  のとき ( $0 < a < 8$ )



よって  $-\frac{a^2}{4} + 2a < a$  なら  
OK

$$\frac{a^2}{4} - 2a > -a$$

$$a^2 - 8a > -4a$$

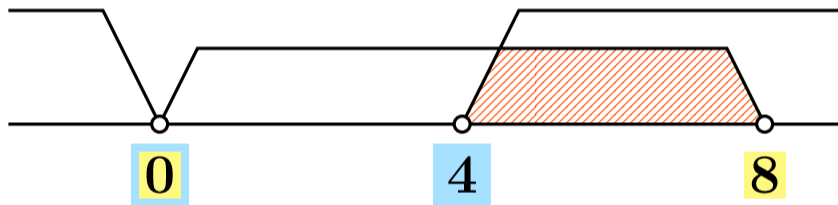
$$a^2 - 4a > 0$$

$$a(a - 4) > 0$$

$$a < 0, 4 < a$$

(ii)  $-\frac{a^2}{4} + 2a > 0$  のとき ( $0 < a < 8$ )

$0 < a < 8$  と  $a < 0, 4 < a$  より



まとめると  $4 < a < 8$  ……②

$$(iii) \quad -\frac{a^2}{4} + 2a = 0 \text{ のとき}$$

$$-\frac{a^2}{4} + 2a = 0$$

$$a^2 - 8a = 0$$

$$a(a - 8) = 0$$

$$a = 0, 8$$

問題に「 $a$  は正の実数」とかいてあるので  
 $a = 8$  のときということになる。

$$(iii) \quad -\frac{a^2}{4} + 2a = 0 \text{ のとき } (a = 8)$$

$$-\frac{a^2}{4} + 2a = 0$$

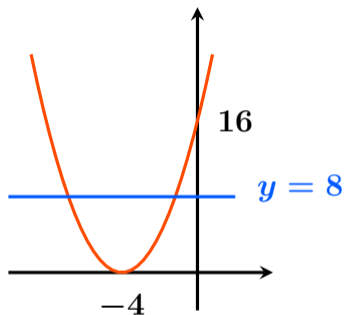
$$a^2 - 8a = 0$$

$$a(a - 8) = 0$$

$$a = 0, 8$$

問題に「 $a$  は正の実数」とかいてあるので  
 $a = 8$  のときということになる。

(iii)  $-\frac{a^2}{4} + 2a = 0$  のとき ( $a = 8$ )



$$y = |x^2 + ax + 2a|$$

$$y = |x^2 + 8x + 16|$$

$$y = |(x + 4)^2|$$

$$y = (x + 4)^2$$

交点が 2 個になるので

$a = 8$  の場合も OK .....③

## まとめると

$$(i) \quad 8 < a < 12 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$(ii) \quad 4 < a < 8 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$$(iii) \quad a = 8 \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

①, ②, ③を合わせて

$$\boxed{\text{答}} \quad 4 < a < 12$$