問題

$$\left| x^2 + ax + 2a \right| = a$$

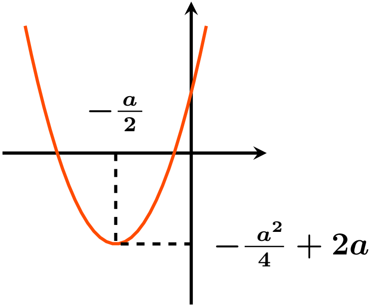
（ただし a は正の実数）

が異なる実数解を、ちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めなさい。

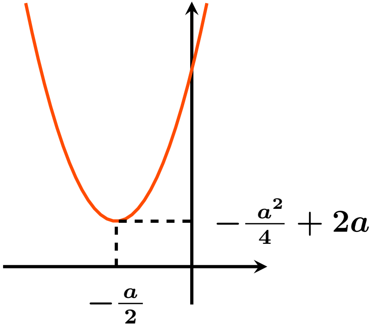
解答

$y = x^2 + ax + 2a$ とおくと

$y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2a$ となるので、グラフは

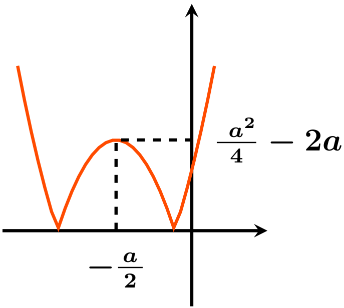


または

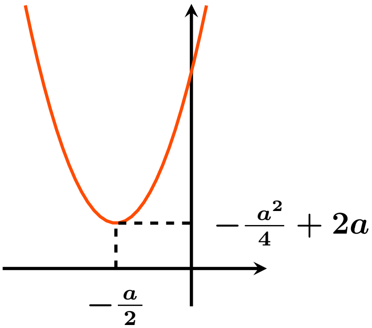


$|x^2+ax+2a|=a$ が異なる 2 個の実数解

だから $y=\left|x^2+ax+2a\right|$ のグラフは

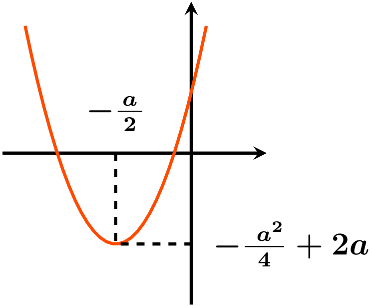


または

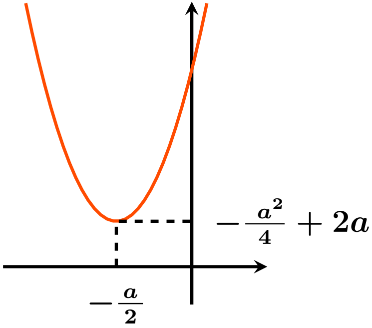


$|x^2+ax+2a|=a$ が異なる 2 個の実数解

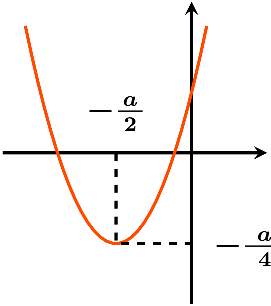
問題に絶対値が付くので、頂点の y 座標が
<0, >0, $=0$ で事情がかわるから場合分け！



または



(i) $-\dfrac{a^2}{4}+2a<0$ のとき

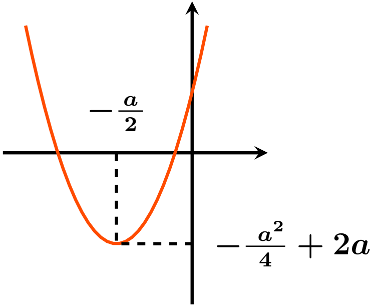


$$
\begin{aligned}
-\frac{a^2}{4}+2a &< 0\\
\frac{a^2}{4}-2a &> 0\\
a^2-8a &> 0\\
a(a-8) &> 0
\end{aligned}
$$

$$a<0,\ 8<a$$

となるが、

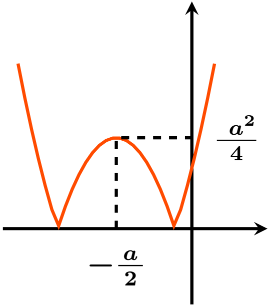
(i)　$-\frac{a^2}{4}+2a<0$ のとき（$a>8$）



$$-\frac{a^2}{4}+2a<0$$
$$\frac{a^2}{4}-2a>0$$
$$a^2-8a>0$$
$$a(a-8)>0$$
$$a<0,\ 8<a$$

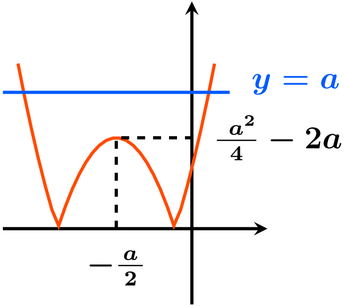
となるが、問題の条件に「a は正の実数」と書かれているので $a>8$ となる。

(i) $-\dfrac{a^2}{4}+2a<0$ のとき ($a>8$)



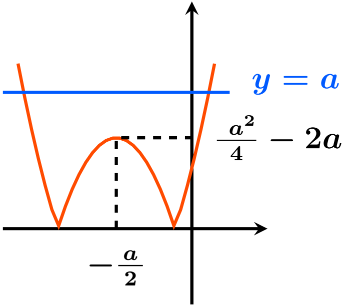
このとき $y=|x^2+ax+2a|$
のグラフは図のようになる。

(i)　$-\frac{a^2}{4}+2a<0$ のとき ($a>8$)



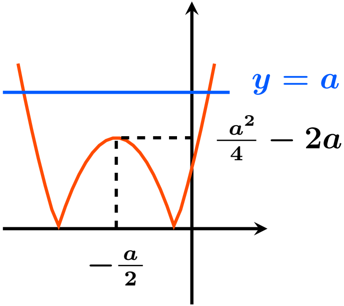
$y=a$ との交点が 2 個になるには、左のようになればよい。

(i) $-\frac{a^2}{4}+2a<0$ のとき $(a>8)$



よって $\frac{a^2}{4}-2a<a$ なら OK

(i) $-\frac{a^2}{4}+2a<0$ のとき ($a>8$)

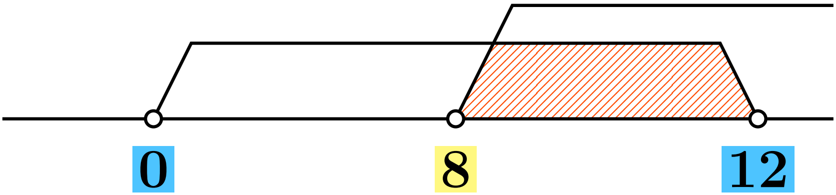


よって $\frac{a^2}{4}-2a<a$ なら OK

$$a^2-8a<4a$$
$$a^2-12a<0$$
$$a(a-12)<0$$
$$0<a<12$$

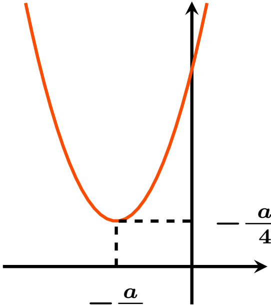
(i) $-\dfrac{a^2}{4}+2a<0$ のとき ($a>8$)

$a>8$ と $0<a<12$ より



まとめると $8<a<12$ ……①

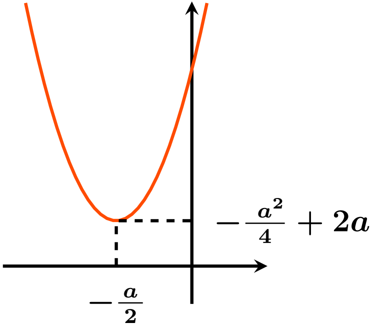
(ii) $-\frac{a^2}{4}+2a>0$ のとき



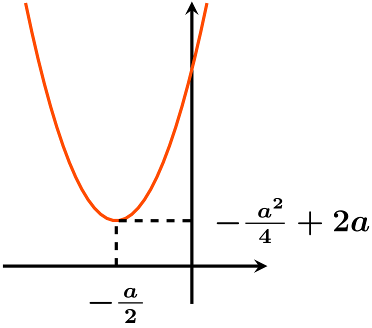
$$
\begin{aligned}
-\frac{a^2}{4}+2a &> 0\\
\frac{a^2}{4}-2a &< 0\\
a^2-8a &< 0\\
a(a-8) &< 0
\end{aligned}
$$

$$0<a<8$$

(ii) $-\frac{a^2}{4}+2a>0$ のとき $(0<a<8)$

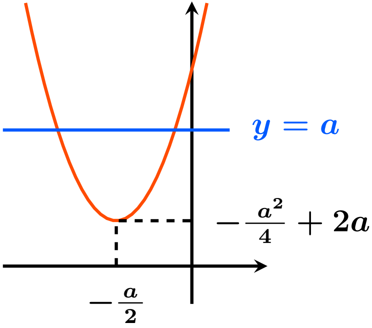


(ii) $-\frac{a^2}{4}+2a>0$ のとき ($0<a<8$)



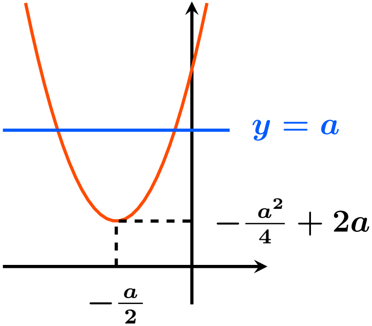
このとき $y=|x^2+ax+2a|$ のグラフは図のようになる。

(ii)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a>0$ のとき（$0<a<8$）



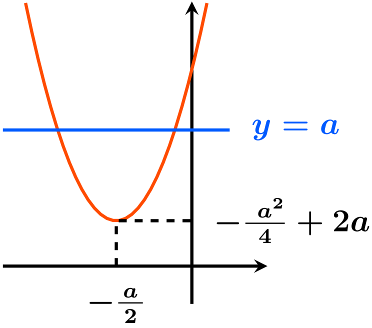
だから $y=a$ との交点が 2 個になるには、左のようになればよい。

(ii) $-\dfrac{a^2}{4}+2a>0$ のとき $(0<a<8)$



よって $-\dfrac{a^2}{4}+2a<a$ なら
OK

(ii) $-\frac{a^2}{4}+2a>0$ のとき $(0<a<8)$

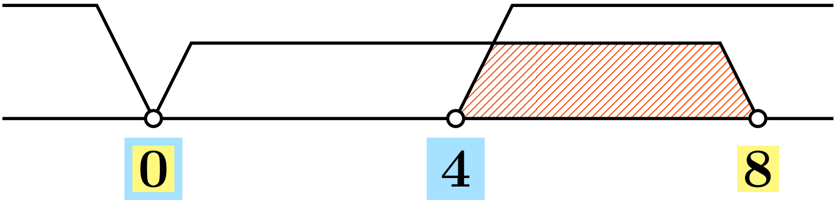


よって $-\frac{a^2}{4}+2a<a$ ならOK

$$\frac{a^2}{4}-2a>-a$$
$$a^2-8a>-4a$$
$$a^2-4a>0$$
$$a(a-4)>0$$
$$a<0,\ 4<a$$

(ii) $-\frac{a^2}{4}+2a>0$ のとき $(0<a<8)$

$0<a<8$ と $a<0,\ 4<a$ より



まとめると $4<a<8$ ……②

(iii) $-\frac{a^2}{4}+2a=0$ のとき

$$\begin{aligned} -\frac{a^2}{4}+2a &= 0 \\ a^2-8a &= 0 \\ a(a-8) &= 0 \end{aligned}$$

$$a=0,\ 8$$

問題に「a は正の実数」とかいてあるので

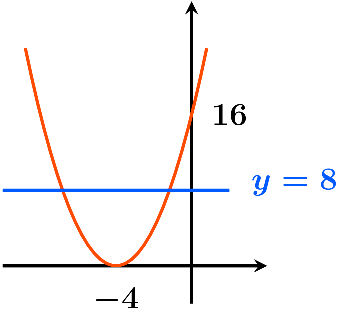
$a=8$ のときということになる。

(iii) $-\frac{a^2}{4}+2a=0$ のとき ($a=8$)

$$
\begin{aligned}
-\frac{a^2}{4}+2a &= 0 \\
a^2-8a &= 0 \\
a(a-8) &= 0 \\
a = 0,\ 8
\end{aligned}
$$

問題に「a は正の実数」とかいてあるので
$a=8$ のときということになる。

(iii) $-\dfrac{a^2}{4}+2a=0$ のとき ($a=8$)



$$y=\left|x^2+ax+2a\right|$$
$$y=\left|x^2+8x+16\right|$$
$$y=\left|(x+4)^2\right|$$
$$y=(x+4)^2$$

交点が 2 個になるので

$a=8$ の場合も OK ……③

まとめると

(i)　$8 < a < 12$　……①

(ii)　$4 < a < 8$　……②

(iii)　$a = 8$　……③

①，②，③を合わせて

答　$4 < a < 12$