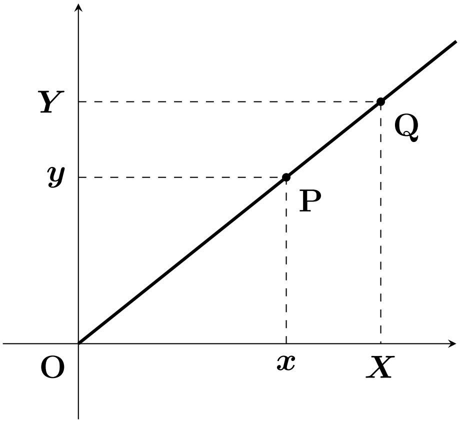
反転

定点 O を端点とする半直線上の 2 点 P, Q に対して $\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = k$ (k は定数, $k > 0$) が成り立つように点 Q を点 P に対応させることを【反転】という。

反転すると【円が直線に変換】されたり《直線が円に変換》されるなど、面白い図形の変換が生じる。

反転の軌跡

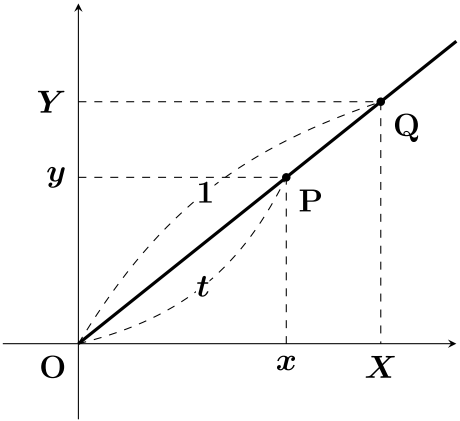


原点 O を端点とする半直線上の 2 点 $\mathrm{P}(x, y), \mathrm{Q}(X, Y)$ が $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$ を満たしている。

(1) x, y を X, Y で表せ

(2) 点 P が直線 $2x+y=1$ 上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ

(1)　x, y を X, Y で表せ



点 P は半直線 OQ 上にあるので、

$\mathrm{OP} : \mathrm{OQ} = t : 1 \ (t > 0)$ とおけて

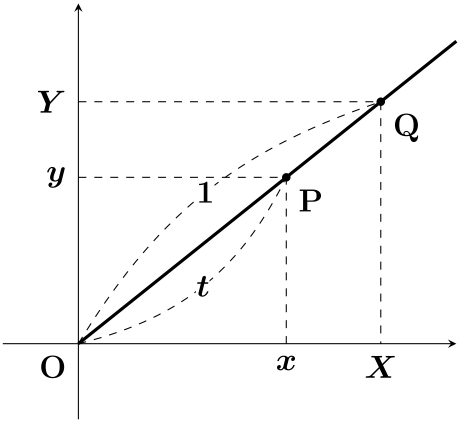
$\mathrm{OP} = t\,\mathrm{OQ}$ と表せる。

ここで $\mathrm{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\mathrm{OQ} = \sqrt{X^2 + Y^2}$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} &= t\,\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OQ} \\ &= t\,\mathrm{OQ}^2 \\ &= t\,(X^2 + Y^2) \end{aligned}$$

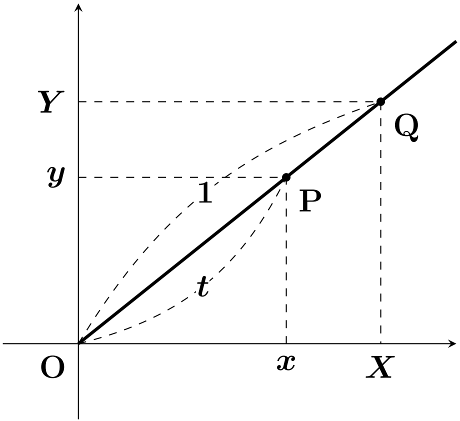
$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=t\,(X^2+Y^2)$ だよ



問題文に $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$ とかかれていたので、$t\,(X^2+Y^2)=4$ となって $X^2+Y^2\neq 0$ だから

$$t=\frac{4}{X^2+Y^2} \quad \cdots①$$

$$t=\frac{4}{X^2+Y^2} \quad \cdots ①$$



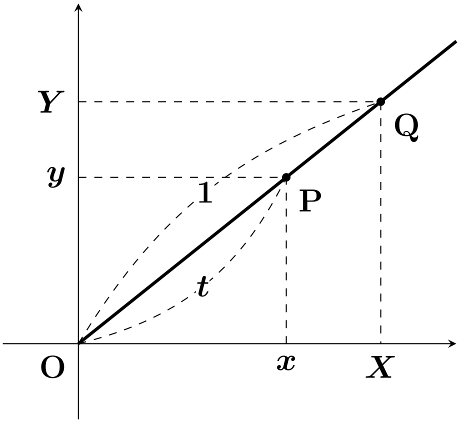
$xy \neq 0$ のとき x と X は同符号、
y と Y も同符号より

$$\mathrm{OP}:\mathrm{OQ}=x:X=y:Y$$
$$=t:1\ (t>0)$$

よって $x=tX$ より①を代入して

$$x=\frac{4X}{X^2+Y^2} \quad \cdots ②$$

$$x=\frac{4X}{X^2+Y^2}\quad \cdots ②$$



同様にして

$$y=tY=\frac{4Y}{X^2+Y^2}\quad \cdots ③$$

$x=0$ のとき $X=0$ より②が成り立つ。$y=0$ のときも同様に③が成り立つので

答 $x=\dfrac{4X}{X^2+Y^2}$, $y=\dfrac{4Y}{X^2+Y^2}$

⑵　P が $2x+y=1$ 上を動くとき Q の軌跡？

$2x+y=1$ に $x=\dfrac{4X}{X^2+Y^2}$, $y=\dfrac{4Y}{X^2+Y^2}$ を代入して

$$
\begin{aligned}
2\cdot\frac{4X}{X^2+Y^2}+\frac{4Y}{X^2+Y^2} &= 1\\
8X \quad + \quad 4Y &= X^2+Y^2\\
0 &= X^2+Y^2-8X-4Y\\
X^2+Y^2-8X-4Y &= 0\\
X^2-8X+Y^2-4Y &= 0
\end{aligned}
$$

⑵　P が $2x+y=1$ 上を動くとき Q の軌跡？

$$\begin{aligned} X^2-8X \quad &+ \quad Y^2-4Y &= 0 \\ (X-4)^2-16+&(Y-2)^2-4 &= 0 \\ (X-4)^2 \quad &+ \quad (Y-2)^2 &= 20 \\ (X-4)^2 \quad &+ \quad (Y-2)^2 &= \sqrt{20}^{\,2} \\ (X-4)^2 \quad &+ \quad (Y-2)^2 &= (2\sqrt{5})^2 \end{aligned}$$

ただし $X^2+Y^2 \fallingdotseq 0$ より $X=Y=0$ を除く。よって軌跡は 答　中心 $(4,2)$，半径 $2\sqrt{5}$ の円（ただし原点を除く）