$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

解の公式を使うと $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$ と計算できるので

$\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right)^2+\left(\frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right)^2$ を計算すれば答えは出る

が、計算がかなり面倒だ。

もっとよい方法はないものだろうか？

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

方程式の答えが　$x=\alpha, \beta$　とは

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

のことだが

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

方程式の答えが　$x=\alpha, \beta$　とは

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

のことだが

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

だけでは、

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

方程式の答えが　$x=\alpha, \beta$　とは

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

のことだが

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

だけでは、問題文とは x^2 の係数が合わない。

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$?

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2+5x+1 \quad = \quad 0$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$?

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2+5x+1 = 0$$

$$\frac{2x^2+5x+1}{2} = \frac{0}{2}$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2+5x+1 = 0$$

$$\frac{2x^2+5x+1}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\frac{2}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2} = 0$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2+5x+1 = 0$$

$$\frac{2x^2+5x+1}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\frac{2}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2} = 0$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2} = 0$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α,β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

式を比較すると

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2} = x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

式を比較すると

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2} = x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

だから

$$-(\alpha+\beta)=\frac{5}{2} \qquad \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

つまり

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{2} \qquad \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

となる。

公式（解と係数の関係）

公式にすると、次のようになる。

あ x^2+ い $x+$ う $=0$ の解が α, β のとき

$$\alpha+\beta=-\frac{\text{い}}{\text{あ}}$$

$$\alpha\times\beta=\frac{\text{う}}{\text{あ}}$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

次に、公式 $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$

を変形すると

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

となるので、

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

次に、公式 $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$

を変形すると

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

となるので、先ほどの

$\alpha+\beta=-\dfrac{5}{2}$　　$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$ を代入して

$$\alpha^2+\beta^2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

$$\alpha^2+\beta^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2}$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

$$\alpha^2+\beta^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - 1$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

$$\alpha^2+\beta^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - 1$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{4}{4}$$

$2x^2+5x+1=0$ の解が α, β のとき $\alpha^2+\beta^2$？

$$
\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2 &= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{25}{4} - 1 \\
&= \frac{25}{4} - \frac{4}{4} = \frac{21}{4} \quad \boxed{答}
\end{aligned}
$$