

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

解の公式を使うと $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$ と計算できるので、 $\left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{4}\right)^2 + \left(\frac{-5 - \sqrt{17}}{4}\right)^2$ を計算すれば答えは出るが、計算が結構面倒だ。

もっとよい方法はないものだろうか？

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

解が \bullet, \blacktriangle とは
のことだが

$$(x - \bullet)(x - \blacktriangle) = 0$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

解が \bullet, \blacktriangle とは
のことだが

$$(x - \bullet)(x - \blacktriangle) = 0$$

$$(x - \bullet)(x - \blacktriangle) = x^2 - (\bullet + \blacktriangle)x + \bullet \times \blacktriangle$$

だけでは、

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

解が \bullet, \blacktriangle とは $(x - \bullet)(x - \blacktriangle) = 0$
のことが

$$(x - \bullet)(x - \blacktriangle) = x^2 - (\bullet + \blacktriangle)x + \bullet \times \blacktriangle$$

だけでは、問題文とは x^2 の係数が合わない。

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\frac{2x^2 + 5x + 1}{2} = \frac{0}{2}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\frac{2x^2 + 5x + 1}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

式を比較すると

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = (x - \bullet)(x - \blacktriangle)$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

式を比較すると

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = (x - \bullet)(x - \blacktriangle)$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = x - (\bullet + \blacktriangle)x + \bullet \times \blacktriangle$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

式を比較すると

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = (x - \bullet)(x - \blacktriangle)$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = x - (\bullet + \blacktriangle)x + \bullet \times \blacktriangle$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

だから

$$-(\bullet + \blacktriangle) = \frac{5}{2}$$

$$\bullet \times \blacktriangle = \frac{1}{2}$$

つまり

$$\bullet + \blacktriangle = -\frac{5}{2}$$

$$\bullet \times \blacktriangle = \frac{1}{2}$$

となる。

公式（解と係数の関係）

公式にすると、次のようになる。

あ $x^2 +$ **い** $x +$ **う** $= 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき

$$\bullet + \blacktriangle = - \frac{\text{い}}{\text{あ}}$$

$$\bullet \times \blacktriangle = \frac{\text{う}}{\text{あ}}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

次に、公式 $\bullet^2 + 2 \times \bullet \times \blacktriangle + \blacktriangle^2 = (\bullet + \blacktriangle)^2$
を変形すると

$$\bullet^2 + \blacktriangle^2 = (\bullet + \blacktriangle)^2 - 2 \times \bullet \times \blacktriangle$$

となるので、

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

次に、公式 $\bullet^2 + 2 \times \bullet \times \blacktriangle + \blacktriangle^2 = (\bullet + \blacktriangle)^2$
を変形すると

$$\bullet^2 + \blacktriangle^2 = (\color{green}\bullet + \color{green}\blacktriangle)^2 - 2 \times \color{orange}\bullet \times \color{orange}\blacktriangle$$

となるので、先ほどの

$$\color{green}\bullet + \color{green}\blacktriangle = -\frac{5}{2} \quad \color{orange}\bullet \times \color{orange}\blacktriangle = \frac{1}{2} \text{ を代入して}$$

$$\bullet^2 + \blacktriangle^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

$$\bullet^2 + \blacktriangle^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

$$\begin{aligned}\bullet^2 + \blacktriangle^2 &= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{25}{4} - 1\end{aligned}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

$$\begin{aligned}\bullet^2 + \blacktriangle^2 &= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{25}{4} - 1 \\ &= \frac{25}{4} - \frac{4}{4}\end{aligned}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が \bullet, \blacktriangle のとき $\bullet^2 + \blacktriangle^2$?

$$\bullet^2 + \blacktriangle^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - 1$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{4}{4} = \frac{21}{4} \quad \boxed{\text{答}}$$