

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

解の公式を使うと $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$ と計算できるので

$\left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{4}\right)^2 + \left(\frac{-5 - \sqrt{17}}{4}\right)^2$ を計算すれば答えは出る

が、計算がかなり面倒だ。

もっとよい方法はないものだろうか？

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

方程式の答えが $x = \alpha, \beta$ とは

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

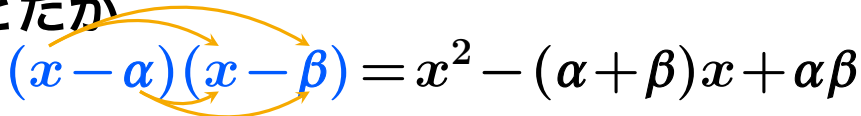
のことだが

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

方程式の答えが $x = \alpha, \beta$ とは

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

のことだが


$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

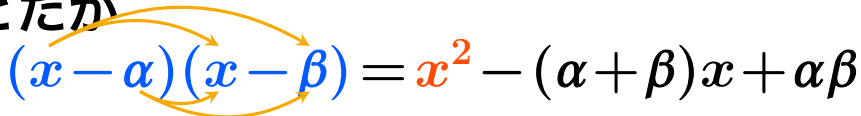
だけでは、

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

方程式の答えが $x = \alpha, \beta$ とは

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

のことだが


$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

だけでは、問題文とは x^2 の係数が合わない。

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x + 1 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 1 = 0 \\ \hline 2 \qquad \qquad \qquad = \frac{0}{2} \end{array}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\frac{2x^2 + 5x + 1}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\frac{2}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

そこで x^2 の係数を合わせるために

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\frac{2x^2 + 5x + 1}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\frac{2}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

式を比較すると

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

式を比較すると

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

だから

$$-(\alpha + \beta) = \frac{5}{2} \qquad \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

つまり

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{2} \qquad \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

となる。

公式（解と係数の関係）

公式にすると、次のようになる。

あ $x^2 +$ い $x +$ う $= 0$ の解が α, β のとき

$$\alpha + \beta = - \frac{\text{い}}{\text{あ}}$$

$$\alpha \times \beta = \frac{\text{う}}{\text{あ}}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

次に、公式 $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$
を変形すると

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

となるので、

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

次に、公式 $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$
を変形すると

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

となるので、先ほどの

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{2} \quad \alpha\beta = \frac{1}{2} \text{ を代入して}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{25}{4} - 1\end{aligned}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - 1$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{4}{4}$$

$2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解が α, β のとき $\alpha^2 + \beta^2$?

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - 1$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{4}{4} = \frac{21}{4} \quad \boxed{\text{答}}$$