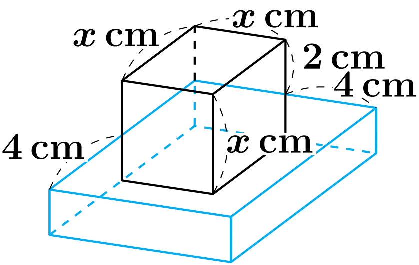
高次方程式の文章問題　#12 その 0

ある立方体の縦、横をそれぞれ 4 cm 長くし、高さを 2 cm 短くした直方体をつくると、体積が 2 倍になりました。

もとの立方体の 1 辺の長さを求めなさい。



縦、横それぞれ $4\,\mathrm{cm}$ 長く、高さを $2\,\mathrm{cm}$ 短く

もとの立方体の 1 辺の長さを $x\ (\mathrm{cm})$ とすると、できた直方体の長さは、次のようになる。

縦 $(x+4)\ \mathrm{cm}$, 横 $(x+4)\ \mathrm{cm}$, 高さ $(x-2)\ \mathrm{cm}$

だから直方体の体積は

$$\text{縦}\times\text{横}\times\text{高さ} = (x+4)(x+4)(x-2)\ \mathrm{cm}^3$$

となる。

もとの立方体の体積は

もとの立方体は　縦 x (cm), 横 x (cm), 高さ x (cm)
だから立方体の体積は

$$\text{縦} \times \text{横} \times \text{高さ} = x \times x \times x = x^3 \ (\mathrm{cm}^3)$$

となる。

問題文によると

直方体の体積 $=$ 2 倍 $\times$ 立方体の体積

と、問題文に書かれているので

$$(x+4)(x+4)(x-2) = 2x^3$$

展開して整理すると

展開して整理する

$$(x+4)(x+4)(x-2) = 2x^3$$
$$(x^2+8x+16)(x-2) = 2x^3$$
$$x^3+8x^2\cancel{+16x}-2x^2\cancel{-16x}-32 = 2x^3$$
$$x^3+6x^2-32 = 2x^3$$
$$x^3-2x^3+6x^2-32 = 0$$
$$-x^3+6x^2-32 = 0$$

両辺に -1 かけ算

$$x^3-6x^2+32 = 0$$

因数定理を使う

$$x^3 - 6x^2 + 32 = 0$$ を解きます。

$x^3 - 6x^2 + 32$ の x の所に $1, -1, 2, -2, \cdots$ を入れて 0 になるものを探すと $x = -2$ が見つかる。

このことは $x + 2$ で割り切れることを示しているので、わり算する。

$(x^3-6x^2+32)\div(x+2)$ を計算

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-8x+16 \\
\hline
x+2 & x^3-6x^2 \qquad\qquad +32 \\
 & x^3+2x^2 \\
\hline
 & \quad -8x^2 \\
 & \quad -8x^2-16x \\
\hline
 & \qquad\qquad 16x+32 \\
 & \qquad\qquad 16x+32 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x^3-6x^2+32=(x+2)(x^2-8x+16)$$

$(x^3-6x^2+32)\div(x+2)$ を組立除法で

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & -6 & 0 & 32 \\
 & & -2 & 16 & -32 \\
\hline
 & 1 & -8 & 16 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$$x^3-6x^2+32=(x+2)(x^2-8x+16)$$

因数分解する

$$x^3-6x^2+32=(x+2)(x^2-8x+16)$$

$x^2-8x+16$ の部分は $(x-4)^2$ と因数分解できるので、まとめると

$$x^3-6x^2+32=(x+2)(x-4)^2$$

計算結果をチェックする

よって
$$\begin{aligned} x^3-6x^2+32 &= 0 \\ (x+2)(x-4)^2 &= 0 \\ x=-2,\ 4 \end{aligned}$$

長さがマイナスの $x=-2$ は適していない。
$x=4$ は問題に適している。

$\boxed{\text{答}}$　$4\,\mathrm{cm}$