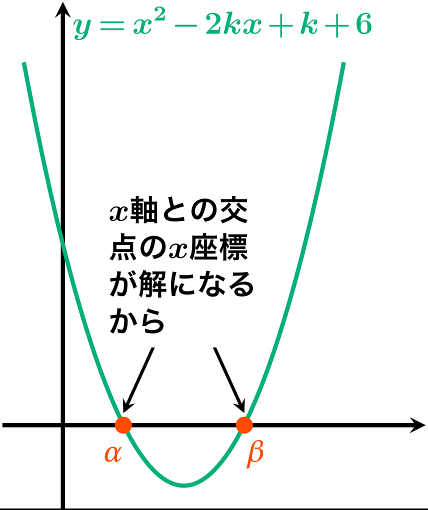
定数 k の値の範囲？

問題 $x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつような、定数 k の値の範囲を求めなさい。

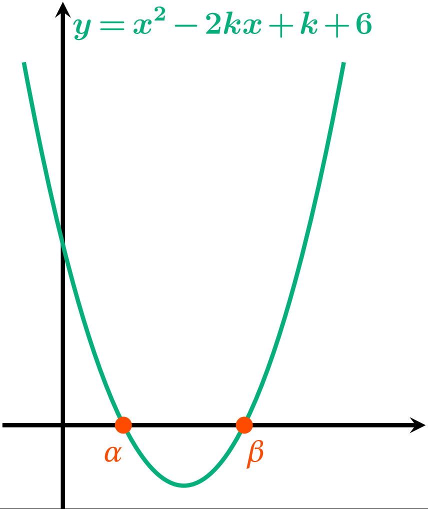
$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解



グラフが、こんな感じになればよい。

こうなるための条件は…

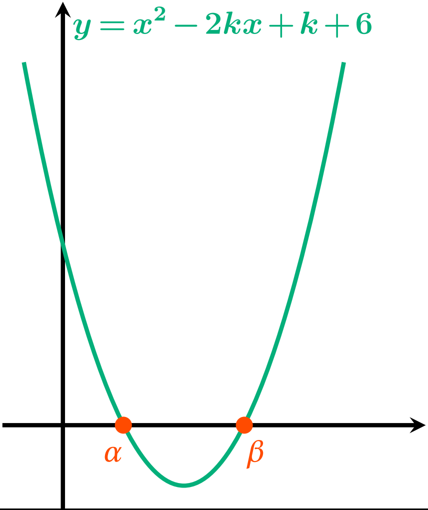
$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解



異なる 2 つの実数解をもつので

① 判別式 $D>0$

$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解



2 つの正の解をもつための条件は

② $\alpha+\beta>0$
③ $\alpha\beta>0$

条件①②③が全部そろえばよい。

公式

解と係数の関係を復習しておこう。

$\boxed{あ}\, x^2 + \boxed{い}\, x + \boxed{う} = 0$ の解が α, β のとき

$$\alpha + \beta = -\frac{\boxed{い}}{\boxed{あ}}$$

$$\alpha \times \beta = \frac{\boxed{う}}{\boxed{あ}}$$

$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

① 判別式 $D>0$ となるには

$$
\begin{aligned}
D = b^2 - 4ac &> 0 \\
(-2k)^2 - 4\times 1\times(k+6) &> 0 \\
4k^2 - 4k - 24 &> 0
\end{aligned}
$$

$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

① 判別式 $D>0$ となるには

$$
\begin{aligned}
D = b^2 - 4ac &> 0 \\
(-2k)^2 - 4\times 1\times (k+6) &> 0 \\
4k^2 - 4k - 24 &> 0 \quad \text{両辺 } \div 4 \\
k^2 - k - 6 &> 0 \\
(k+2)(k-3) &> 0
\end{aligned}
$$

$$k<-2,\quad 3<k \quad \cdots\cdots①$$

$1x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

② $\alpha+\beta>0$ となるには

$$\alpha+\beta=-\frac{\boxed{\text{い}}}{\boxed{\text{あ}}}=-\frac{-2k}{1}=2k>0$$

を計算して

$$k>0 \quad \cdots\cdots ②$$

③ $\alpha\beta>0$ となるには

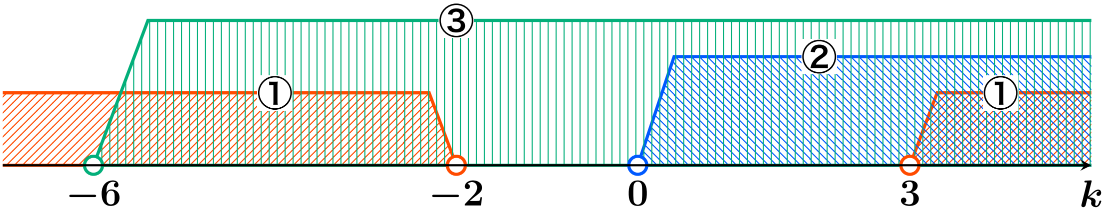
$$\alpha\beta=\frac{\text{う}}{\text{あ}}=\frac{k+6}{1}=k+6>0$$

を計算して

$$k>-6 \quad \cdots\cdots ③$$

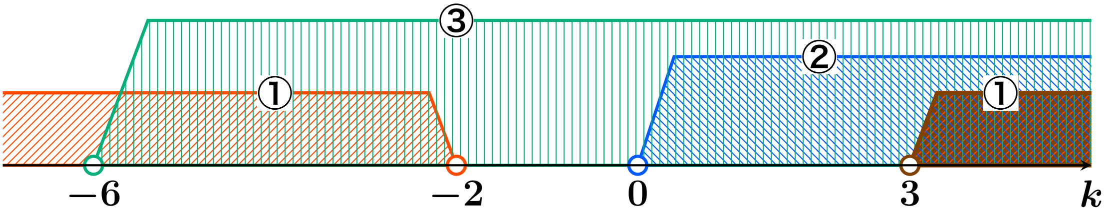
$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

3 つの範囲が重なる部分は



$x^2-2kx+k+6=0$ が異なる 2 つの正の解

3 つの範囲が重なる部分は



答　$k>3$　$(3<k$ でも OK$)$

$x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ が異なる 2 つの正の解

数学Ⅰで学習する《判別式》《放物線の軸》《切片》を使って解くことも可能です。