

放物線 $y = x^2 + 2x + 2$ と直線 $y = 2ax + b$ が共有点をもたないような a, b が満たす条件を求め、その条件が表す領域を ab 平面上に図示せよ。

放物線 $y = x^2 + 2x + 2$ と直線 $y = 2ax + b$ が共有点をもたないような a, b が満たす条件を求め、その条件が表す領域を ab 平面上に図示せよ。

y を消去して

$$x^2 + 2x + 2 = 2ax + b$$

判別式を調べる

$$x^2 + 2x + 2 = 2ax + b$$

$$x^2 + 2x - 2ax + 2 - b = 0$$

$$x^2 + 2(1-a)x + 2 - b = 0$$

共有点をもたないためには、判別式 $D < 0$ なので

$$D = (2(1-a))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2-b) < 0$$

$$\left(\frac{D}{4} < 0 \text{ を計算してもよい} \right)$$

ゴリゴリ計算する

$$D = (2(1-a))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2-b) < 0$$

$$4(1-2a+a^2) - 8 + 4b < 0$$

$$4 - 8a + 4a^2 - 8 + 4b < 0$$

÷4

$$4a^2 - 8a - 4 + 4b < 0$$

平方完成

$$a^2 - 2a - 1 + b < 0$$

$$(a-1)^2 - 1 - 1 + b < 0$$

$$(a-1)^2 - 2 + b < 0$$

不等式の領域になる

$$(a-1)^2 - 2 + b < 0$$

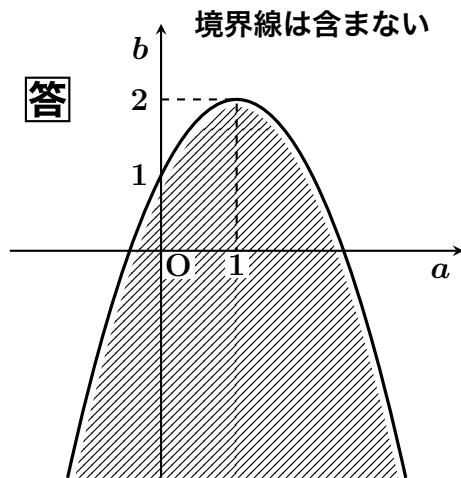
$$b < -(a-1)^2 + 2$$

ピンとこなければ $y < -(x-1)^2 + 2$ だと思
ってよい

放物線 $y = -(x-1)^2 + 2$ の下側

図の斜線部分が答え

答



$$b < -(a-1)^2 + 2$$

頂点 (1, 2)

上に凸の放物線の下側

$y < -(x-1)^2 + 2$ だと思つてイメージしやすいかな