$y=(1+\sin x)\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ 最大最小値

増減を調べるため微分する。導関数の公式

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$$

を使うと

$$\begin{aligned} y' &= \{(1+\sin x)\cos x\}' \\ &= (1+\sin x)'\cos x+(1+\sin x)\cdot(\cos x)' \end{aligned}$$

$y=(1+\sin x)\cos x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ 最大最小値

$$
\begin{aligned}
y' &= (1+\sin x)'\cos x+(1+\sin x)\cdot(\cos x)' \\
&= \cos x\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(-\sin x) \\
&= \cos^2 x-\sin x-\sin^2 x \\
&= (1-\sin^2 x)-\sin x-\sin^2 x \\
&= -2\sin^2 x-\sin x+1 \\
&= -2X^2-X+1
\end{aligned}
$$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\sin x=X$ とおく

$y=(1+\sin x)\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ 最大最小値

$$\begin{aligned} y' &= -2X^2-X+1 \\ &= -(2X^2+X-1) \\ &= -(2X-1)(X+1) \\ &= -(2\sin x-1)(\sin x+1) \end{aligned}$$

一旦停止

$0<x<2\pi$ で $y'=0$ となるのは

$2\sin x-1=0$ または $\sin x+1=0$ より

$\sin x=\frac{1}{2}$ または $\sin x=-1$ だから

$y=(1+\sin x)\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ 最大最小値

$\sin x=\dfrac{1}{2}$　　または　　$\sin x=-1$

$x=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi$　　または　　$x=\dfrac{3}{2}\pi$

増減表をかくと

$y=(1+\sin x)\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ 最大最小値

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'			0		0		0		
y									

$y=(1+\sin x)\cos x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ 最大最小値

$0 < x < \dfrac{\pi}{6}$ では $0 < \sin x < \dfrac{1}{2}$ だから

($\sin x \fallingdotseq 0.1$ と思うと)

$y' = -(2\sin x - 1)(\sin x + 1) > 0$

となるから　y' は $+$　になる。

$y=(1+\sin x)\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ 最大最小値

$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$ では $\sin x>\dfrac{1}{2}$ だから

($\sin x=1$ と思うと　)

$y'=-(2\sin x-1)(\sin x+1)<0$

となるから　y' は $-$　になる。

$y=(1+\sin x)\cos x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ 最大最小値

$\dfrac{5}{6}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi$ では $-1 < \sin x < \dfrac{1}{2}$ だから

($\sin x = 0$ と思うと)

$y' = -(2\sin x - 1)(\sin x + 1) > 0$

となるから　y' は $+$　になる。

$y=(1+\sin x)\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ 最大最小値

$\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ では $-1<\sin x<0$ だから

$(\ \sin x\fallingdotseq -0.5$ と思うと $\ )$

$y'=-(2\sin x-1)(\sin x+1)>0$

となるから　y' は $+$ 　になる。

$y=(1+\sin x)\cos x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ 最大最小値

次に $x=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ のときの y の値を求めよう。

$x=0$ のときの y の値は

$$
\begin{aligned}
y &= (1+\sin 0)\cos 0 \\
&= (1+\ 0\ )\cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

一旦停止

$x=\frac{\pi}{6}$ のときの y の値は

$$
\begin{aligned}
y &= \left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} \\
&= \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

一旦停止

$x=\frac{5}{6}\pi$ のときの y の値は

$$\begin{aligned} y &= \left(1+\sin\frac{5}{6}\pi\right)\cos\frac{5}{6}\pi \\ &= \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

一旦停止

$y=(1+\sin x)\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ 最大最小値

$x=\frac{3}{2}\pi$ のときの y の値は

$$
\begin{aligned}
y &= \left(1+\sin\frac{3}{2}\pi\right)\cos\frac{3}{2}\pi \\
&= (1\quad -1\ )\cdot\quad 0 \\
&= \quad 0 \quad\cdot\quad 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

一旦停止

$x=2\pi$ のときの y の値は

$$\begin{aligned} y &= (1+\sin 2\pi)\cos 2\pi \\ &= (1+0)\cdot 1 \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

一旦停止

よって増減表は次のようになるから

$y=(1+\sin x)\cos x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ 最大最小値

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

$\boxed{答}$　$x=\frac{\pi}{6}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x=\frac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$y=(1+\sin x)\cos x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ のグラフ