

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

増減を調べるため微分する。導関数の公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を使うと

$$\begin{aligned}y' &= \{(1 + \sin x) \cos x\}' \\ &= (1 + \sin x)' \cos x + (1 + \sin x) \cdot (\cos x)'\end{aligned}$$

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$$\begin{aligned}y' &= (1 + \sin x)' \cos x + (1 + \sin x) \cdot (\cos x)' \\&= \cos x \cdot \cos x + (1 + \sin x) \cdot (-\sin x) \\&= \cos^2 x - \sin x - \sin^2 x \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\&= (1 - \sin^2 x) - \sin x - \sin^2 x \\&= -2\sin^2 x - \sin x + 1 \quad \sin x = X \text{ とおく} \\&= -2X^2 - X + 1\end{aligned}$$

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$$y' = -2X^2 - X + 1$$

$$= -(2X^2 + X - 1)$$

$$= -(2X - 1)(X + 1)$$

$$= -(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) \quad \text{一日停止}$$

$0 < x < 2\pi$ で $y' = 0$ となるのは

$2 \sin x - 1 = 0$ または $\sin x + 1 = 0$ より

$\sin x = \frac{1}{2}$ または $\sin x = -1$ だから

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \sin x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad \text{または} \quad x = \frac{3}{2}\pi$$

増減表をかくと

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$...	2π
y'			0		0		0		
y									

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$0 < x < \frac{\pi}{6}$ では $0 < \sin x < \frac{1}{2}$ だから

($\sin x \doteq 0.1$ と思うと)

$$y' = -(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) > 0$$

となるから y' は $+$ になる。

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ では $\sin x > \frac{1}{2}$ だから

($\sin x = 1$ と思うと)

$$y' = -(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) < 0$$

となるから y' は $-$ になる。

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$\frac{5}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ では $-1 < \sin x < \frac{1}{2}$ だから
($\sin x = 0$ と思うと)

$$y' = -(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) > 0$$

となるから y' は $+$ になる。

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ では $-1 < \sin x < 0$ だから

($\sin x \doteq -0.5$ と思うと)

$$y' = -(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) > 0$$

となるから y' は $+$ になる。

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

次に $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ のときの y の値を求めよう。

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$x = 0$ のときの y の値は

$$\begin{aligned} y &= (1 + \sin 0) \cos 0 \\ &= (1 + 0) \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$x = \frac{\pi}{6}$ のときの y の値は

$$\begin{aligned} y &= \left(1 + \sin \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$x = \frac{5}{6}\pi$ のときの y の値は

$$\begin{aligned} y &= (1 + \sin \frac{5}{6}\pi) \cos \frac{5}{6}\pi \\ &= (1 + \frac{1}{2}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= \frac{3}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$x = \frac{3}{2}\pi$ のときの y の値は

$$\begin{aligned} y &= (1 + \sin \frac{3}{2}\pi) \cos \frac{3}{2}\pi \\ &= (1 \quad -1) \cdot 0 \\ &= 0 \cdot 0 \\ &= 0 \quad \text{一目停止} \end{aligned}$$

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

$x = 2\pi$ のときの y の値は

$$\begin{aligned} y &= (1 + \sin 2\pi) \cos 2\pi \\ &= (1 + 0) \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



よって増減表は次のようになるから

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 最大最小値

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$...	2π
y'	/	+	0	-	0	+	0	+	/
y	1	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0	↗	1

【答】 $x = \frac{\pi}{6}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x = \frac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) のグラフ

