媒介変数のまま増減表

$x=2\cos 2\theta,\ \ y=2\cos 3\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ の概形？

【2014 佐賀大】

$2\theta=t$ とすると $x=2\cos t$ なので微分して

$$\frac{dx}{dt}=(2\cos t)'=2(\cos t)'=2(-\sin t)=-2\sin 2\theta$$ 一旦停止

$$\frac{dt}{d\theta}=2$$ 一旦停止

よって $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{dt}{d\theta}=(-2\sin 2\theta)\cdot 2=-4\sin 2\theta$ 一旦停止

$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$

$3\theta=t$ とすると $y=2\cos t$ なので微分して

$$\frac{dy}{dt}=(2\cos t)'=2(\cos t)'=2(-\sin t)=-2\sin 3\theta$$ 一旦停止

$$\frac{dt}{d\theta}=3$$ 一旦停止

よって $\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{d\theta}=(-2\sin 3\theta)\cdot 3=-6\sin 3\theta$ 一旦停止

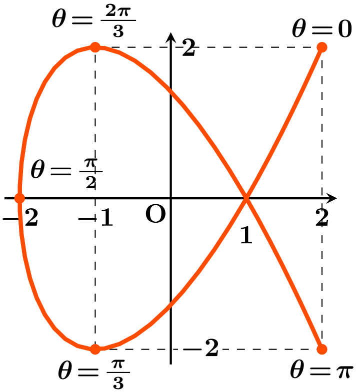
$\dfrac{dx}{d\theta}=-4\sin 2\theta,\quad \dfrac{dy}{d\theta}=-6\sin 3\theta$ が分かった

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲では $0\leqq 2\theta\leqq 2\pi$ で
$-4\sin 2\theta=0$ は $\sin 2\theta=0$ と変形できて
$2\theta=0,\ \pi,\ 2\pi$ だから $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi$ 一旦停止

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲では $0\leqq 3\theta\leqq 3\pi$ で
$-6\sin 3\theta=0$ は $\sin 3\theta=0$ と変形できて
$3\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$ だから $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi$ 一旦停止

$$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2

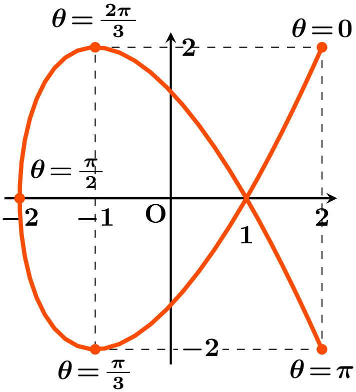


$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ では $\frac{dx}{d\theta}<0$ なので

グラフは x 軸の負の方向 $\leftarrow$ へ進む。

$$x=2\cos 2\theta, \quad y=2\cos 3\theta \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2

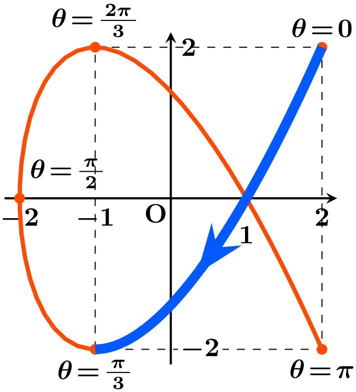


$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ では $\frac{dy}{d\theta}<0$ なので

グラフは y 軸の負の方向 $\downarrow$ へ進む。

$$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2

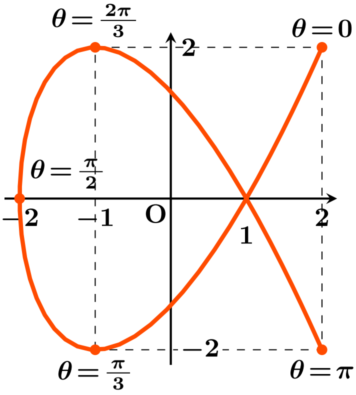


合体させて $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ では

グラフは $\swarrow$ へ進む。

$$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

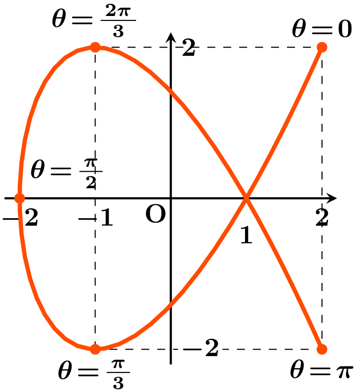
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2



$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$ では $\frac{dx}{d\theta}<0$ なので
グラフは x 軸の負の方向 $\leftarrow$ へ進む。

$$x = 2\cos 2\theta, \quad y = 2\cos 3\theta \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2

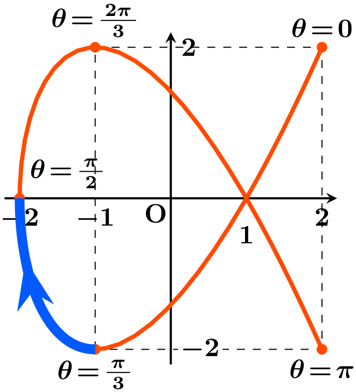


$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ では $\frac{dy}{d\theta} > 0$ なので

グラフは y 軸の正の方向 $\uparrow$ へ進む。

$$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2

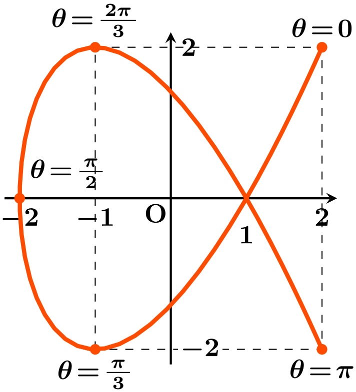


合体させて $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$ では

グラフは ↖ へ進む。

$$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2

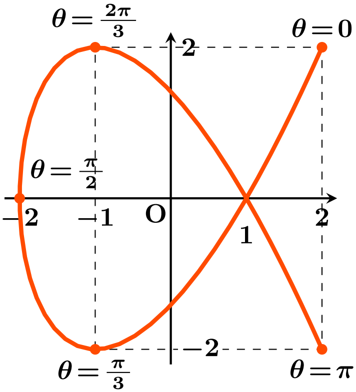


$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$ では $\frac{dx}{d\theta}>0$ なので

グラフは x 正の負の方向 $\rightarrow$ へ進む。

$$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2

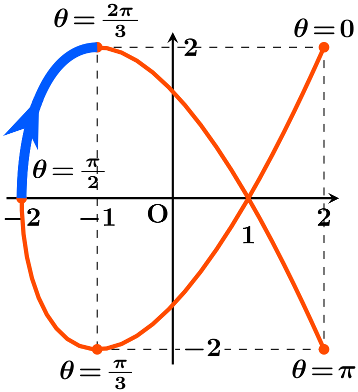


$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ では $\dfrac{dy}{d\theta}>0$ なので

グラフは y 軸の正の方向 $\uparrow$ へ進む。

$$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2

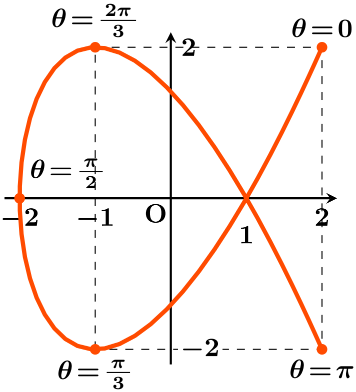


合体させて $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$ では

グラフは ↗ へ進む。

$$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2

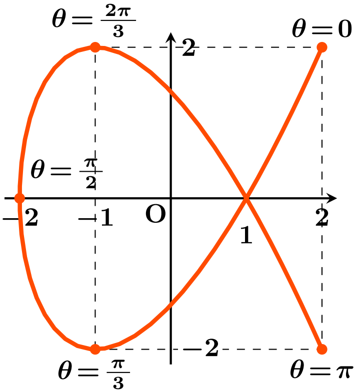


$\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi$ では $\frac{dx}{d\theta}>0$ なので

グラフは x 正の負の方向 $\rightarrow$ へ進む。

$$x=2\cos 2\theta,\quad y=2\cos 3\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

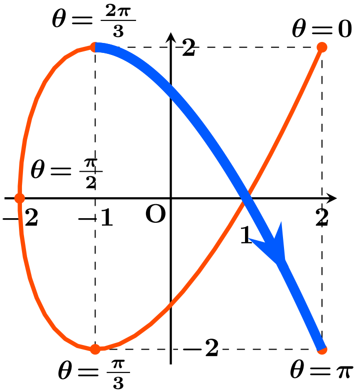
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2



$\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi$ では $\frac{dy}{d\theta}<0$ なので
グラフは y 軸の負の方向 $\downarrow$ へ進む。

$$x = 2\cos 2\theta, \quad y = 2\cos 3\theta \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2



合体させて $\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ では

グラフは ↘ へ進む。