

微分方程式 $x \frac{dy}{dx} = -y$ を解きなさい (変数分離形)

あとで使うので説明します (こんな説明でいいよね?)

$$|y| = \frac{1}{|x|} \iff y = \pm \frac{1}{x}$$

Diagram illustrating the derivation of the solutions from the absolute value equation:

$+y = \frac{1}{+x}$		$y = \frac{1}{x}$
$+y = \frac{1}{-x}$		$y = -\frac{1}{x}$
$-y = \frac{1}{+x}$		
$-y = \frac{1}{-x}$		

微分方程式 $x \frac{dy}{dx} = -y$ を解きなさい (変数分離形)

次に $y \neq 0$ のとき $x \neq 0$ であることを、背理法を使って証明します。

もし $y \neq 0$ のとき $x = 0$ とすると $x \frac{dy}{dx} = -y$ に代入して

$$0 \cdot \frac{dy}{dx} = -y$$

$$0 = y$$

となって矛盾する。よって $x \neq 0$

微分方程式 $x \frac{dy}{dx} = -y$ を解きなさい (変数分離形)

(i) $y \neq 0$ のときは $x \neq 0$ なので両辺を xy で割って

$$\frac{1}{xy} \cdot x \frac{dy}{dx} = -y \cdot \frac{1}{xy}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\log_a a = 1, \quad k \log_a M = \log_a M^k, \quad \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx \quad \int \frac{1}{x} dx = \log_e |x| + C$$

$$\log_e |y| = -\log_e |x| + C' \quad \text{積分定数は } +, - \text{ 関係なし}$$

$$\log_e |y| = -\log_e |x| + C' \log_e e$$

$$\log_e |y| = -\log_e |x| + \log_e e^{C'} \quad \text{前後入れ替え}$$

$$\log_e |y| = \log_e e^{C'} - \log_e |x|$$

$$\log_e |y| = \log_e \frac{e^{C'}}{|x|}$$

(i) $y \neq 0$ のときを計算中

$$\log_e |y| = \log_e \frac{e^{C'}}{|x|}$$

$$|y| = \frac{e^{C'}}{|x|}$$

$$y = \pm \frac{e^{C'}}{x}$$

$\pm e^{C'} = C$ とおくと

$$y = \frac{C}{x} \dots \textcircled{1}$$

ここで $C = \pm e^{C'}$ は、0 以外の値となる定数である。

$$y = \frac{C}{x} \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $y=0$ のときは

$\frac{dy}{dx}=0$ となるので、問題文にかかれていた $x \frac{dy}{dx} = -y$ の解となっていて、これは $\textcircled{1}$ の $C=0$ の場合だ。(ついさっき C は 0 以外の値となる定数 とかいたけど、 $C=0$ のときも OK だよ！ ということだ)

答 $y = \frac{C}{x} \quad (C \text{ は任意の定数})$