

$\sin x$ を微分せよ

$(\sin x)'$ を求めよ

$\sin x$ を微分せよ

$(\sin x)'$ を求めよ

結論からかくと

$$(\sin x)' = \cos x \quad \boxed{\text{答}}$$

暗記すれば受験は突破できるけど、定義を使って計算してみるぞ！

$\sin x$ を微分しなさい

公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は使ってよいとする。

導関数の定義を復習しよう。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\sin x$ を微分しなさい

当てはめると

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$



$\sin x$ を微分しなさい

当てはめると

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$



ここで加法定理

$$\sin(\bullet \pm \blacktriangle) = \sin \bullet \cos \blacktriangle \pm \cos \bullet \sin \blacktriangle$$

から $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$

$\sin x$ を微分しなさい

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h - \sin x + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}\end{aligned}$$

$\sin x$ を微分しなさい

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$\sin x$ を微分しなさい

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$



$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ なので $\cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x$ となる。

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ を求める

次に $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ を計算する。

$h \rightarrow 0$ のとき $\frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ で不定形になるので

工夫をする必要がある。

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ を求める

$$\frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)}$$

$$h(\cos h + 1)$$

$$= \frac{\cos^2 h - 1^2}{h(\cos h + 1)}$$

$\sin^2 h + \cos^2 h = 1$ を使う

$$= \frac{-\sin^2 h \cdot h}{h(\cos h + 1)h}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ を使いたい

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ を求める

$$\begin{aligned} &= \frac{-\sin^2 h \cdot h}{h(\cos h + 1)h} \\ &= \frac{-\sin^2 h \cdot h}{h^2(\cos h + 1)} \\ &= \frac{-h}{\cos h + 1} \left(\frac{\sin h}{h} \right)^2 \end{aligned}$$



$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ を求める

だから

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{\cos h + 1} \left(\frac{\sin h}{h} \right)^2 \\ &= \frac{-0}{1 + 1} (1)^2 = 0 \end{aligned}$$



$\sin x$ を微分しなさい

全部をまとめると

$$\begin{aligned} & (\sin x)' \\ = & \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ = & \sin x \quad \times 0 \quad + \cos x \quad \times 1 \\ = & \cos x \quad \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$

$\sin x$ を微分しなさい

高校数学の学習内容を総動員する必要があるのが理解できましたか？

でも自分も高校生の頃は理解できずに暗記していただけだから、能力の高い人以外は、深入りしない方がいいのかも…