$\sin x$ を微分せよ　　$(\sin x)'$ を求めよ

結論からかくと

$$(\sin x)' = \cos x \quad \boxed{答}$$

暗記すれば受験は突破できるけど、定義を使って計算してみるぞ！

$\sin x$ を微分しなさい

公式 $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ は使ってよいとする。

導関数の定義を復習しよう。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$\sin x$ を微分しなさい

当てはめると

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

一旦停止

$\sin x$ を微分しなさい

当てはめると

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

一旦停止

ここで加法定理

$$\sin(● \pm ▲) = \sin ● \cos ▲ \pm \cos ● \sin ▲$$

から $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$

$\sin x$ を微分しなさい

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h - \sin x + \cos x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}
\end{aligned}
$$

$\sin x$ を微分しなさい

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$\sin x$ を微分しなさい

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

一旦停止

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ なので $\cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x$

となる。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$ を求める

次に $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$ を計算する。

$h\to 0$ のとき $\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ で不定形になるので

工夫をする必要がある。

$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ を求める

$$\frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)}$$

$$= \frac{\cos^2 h - 1^2}{h(\cos h + 1)}$$

$\sin^2 h + \cos^2 h = 1$ を使う

$$= \frac{-\sin^2 h \cdot h}{h(\cos h + 1) h}$$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ を使いたい

$\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h}$ を求める

$$
= \frac{-\sin^2 h \cdot h}{h(\cos h + 1)h}
$$

$$
= \frac{-\sin^2 h \cdot h}{h^2(\cos h + 1)}
$$

$$
= \frac{-h}{\cos h + 1}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2
$$

一旦停止

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$ を求める

だから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{\cos h+1}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2$$

$$=\frac{-0}{1+1}\left(1\right)^2 \qquad =0$$

一旦停止

$\sin x$ を微分しなさい

全部をまとめると

$$
\begin{aligned}
&(\sin x)' \\
=\ & \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
=\ & \sin x \times 0 + \cos x \times 1 \\
=\ & \cos x \quad \boxed{\text{答}}
\end{aligned}
$$

$\sin x$ を微分しなさい

高校数学の学習内容を総動員する必要があるのが理解できましたか？

でも私も高校生の頃は理解できずに暗記していただけだから、能力の高い人以外は、深入りしない方がいいのかも…