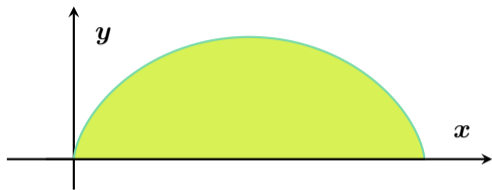


面積を求めなさい



サイクロイド

$$x = \theta - \sin \theta$$

$$y = 1 - \cos \theta$$

$$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分
の面積を求めなさい。

x の範囲は？ $(x = \theta - \sin \theta)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

θ	0	\longrightarrow	2π
x		\longrightarrow	

x の範囲は？ $(x = \theta - \sin \theta)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

θ	0	\longrightarrow	2π
<hr/>			
x		\longrightarrow	

$$\begin{aligned} \theta = 0 \text{ のとき} \quad x &= 0 - \sin 0 \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

x の範囲は？ $(x = \theta - \sin \theta)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

θ	0	\longrightarrow	2π
x	0	\longrightarrow	

$$\begin{aligned} \theta = 0 \text{ のとき} \quad x &= 0 - \sin 0 \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

x の範囲は？ $(x = \theta - \sin \theta)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

θ	0	\longrightarrow	2π
x	0	\longrightarrow	

$$\begin{aligned} \theta = 2\pi \text{ のとき} \quad x &= 2\pi - \sin 2\pi \\ &= 2\pi - 0 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

x の範囲は？ $(x = \theta - \sin \theta)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

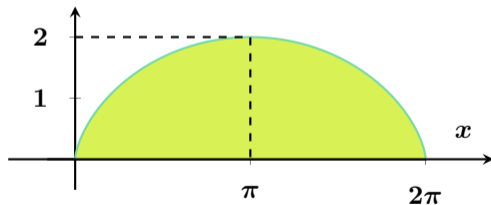
θ	0	\longrightarrow	2π
x	0	\longrightarrow	2π

$$\begin{aligned} \theta = 2\pi \text{ のとき} \quad x &= 2\pi - \sin 2\pi \\ &= 2\pi - 0 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

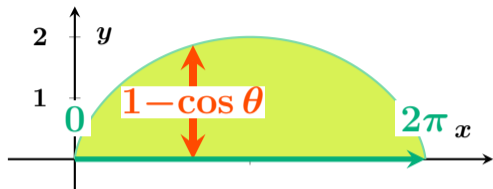
y の範囲は？ ($y = 1 - \cos \theta$)

問題を解くには関係ないが

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ のとき、 y の範囲は $0 \leq y \leq 2$ となる。だからグラフはつぎのようになる。



サイクロイド $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$



求める面積は x の範囲 $0 \rightarrow 2\pi$ で $1 - \cos \theta$ を積分すればよいので、答えはこれだ。

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) dx \quad \boxed{\text{答}}$$

サイクロイド $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$

後は $\int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) dx$ を計算するだけだ。

θ と dx だと計算できないので、計算しやすい θ にそろえるため $x = \theta - \sin \theta$ の両辺を θ で微分する。

サイクロイド $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$

$x = \theta - \sin \theta$ を微分

$$\frac{dx}{d\theta} = (\theta - \sin \theta)'$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (\theta)' - (\sin \theta)'$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta$$

サイクロイド $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta$$

$$dx = (1 - \cos \theta) d\theta \quad \text{となる。}$$

$$\begin{aligned} \text{だから 答} &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) dx \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

サイクロイド $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \end{aligned}$$

計算を続けるため、2倍角公式を変形した式

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \text{ を利用して}$$

サイクロイド $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \end{aligned}$$

サイクロイド $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

サイクロイド $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$

$$\int \frac{3}{2} d\theta = \frac{3}{2}\theta + C$$

$$\int \cos \theta d\theta = \sin \theta + C$$

$$\int \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta + C \text{ を利用して}$$

(公式だと思ってよいです)

サイクロイド $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

面積を求めなさい

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 2 \cdot 2\pi \right) \\ &\quad - \left(\frac{3}{2} \cdot 0 - 2\sin 0 + \frac{1}{4}\sin 0 \right) \end{aligned}$$

面積を求めなさい

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2 \sin 2\pi + \frac{1}{4} \sin 2 \cdot 2\pi \right) \\ &\quad - \left(\frac{3}{2} \cdot 0 - 2 \sin 0 + \frac{1}{4} \sin 0 \right) \\ &= \left(3\pi - 2 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 \right) - (0 - 0 + 0) \\ &= 3\pi \quad \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$