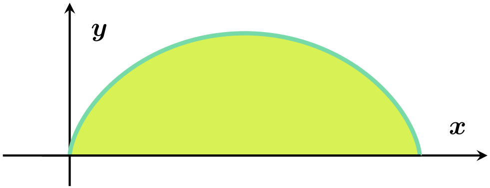
面積を求めなさい



サイクロイド

$$x = \theta - \sin\theta$$
$$y = 1 - \cos\theta$$
$$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい。

x の範囲は？　　$(x = \theta - \sin\theta)$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

$$
\begin{array}{c|ccc}
\theta & 0 & \longrightarrow & 2\pi \\
\hline
x & & \longrightarrow &
\end{array}
$$

x の範囲は？　$(x = \theta - \sin\theta)$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

θ	0	$\longrightarrow$	2π
x		$\longrightarrow$	

$\theta = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
x &= 0 - \sin 0 \\
&= 0 - \quad 0 \\
&= \quad 0
\end{aligned}
$$

x の範囲は？　$(x = \theta - \sin\theta)$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

$$\begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & \longrightarrow & 2\pi \\ \hline x & 0 & \longrightarrow & \end{array}$$

$\theta = 0$ のとき

$$\begin{aligned} x &= 0 - \sin 0 \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

x の範囲は？　$(x = \theta - \sin\theta)$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

$$\begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & \longrightarrow & 2\pi \\ \hline x & 0 & \longrightarrow & \end{array}$$

$\theta = 2\pi$のとき

$$\begin{aligned} x &= 2\pi - \sin 2\pi \\ &= 2\pi - 0 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

x の範囲は？　$(x = \theta - \sin\theta)$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のときの x の範囲を求めよう。

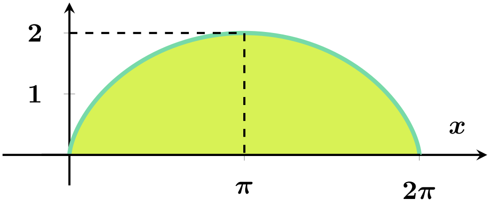
$$
\begin{array}{c|ccc}
\theta & 0 & \longrightarrow & 2\pi \\
\hline
x & 0 & \longrightarrow & 2\pi
\end{array}
$$

$\theta = 2\pi$のとき

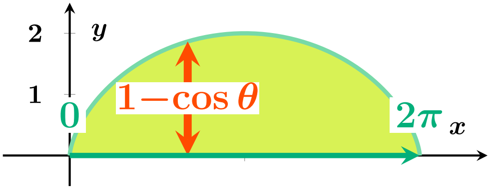
$$
\begin{aligned}
x &= 2\pi - \sin 2\pi \\
&= 2\pi - 0 \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

y の範囲は？　$(y = 1 - \cos\theta)$

問題を解くには関係ないが
$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき、y の範囲は $0 \leqq y \leqq 2$ となる。だからグラフはつぎのようになる。



サイクロイド $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$



求める面積は x の範囲 $0 \longrightarrow 2\pi$ で $1 - \cos\theta$ を積分すればよいので、答えはこれだ。

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)\, dx \qquad \boxed{答}$$

サイクロイド $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$

後は $\displaystyle\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)\,dx$ を計算するだけだ。

θ と dx だと計算できないので、計算しやすい θ にそろえるため $x = \theta - \sin\theta$ の両辺を θ で微分する。

サイクロイド $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$

$x = \theta - \sin\theta$ を微分

$$\frac{dx}{d\theta} = (\theta - \sin\theta)'$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (\theta)' - (\sin\theta)'$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta$$

サイクロイド $x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = 1-\cos\theta$$

$$dx = (1-\cos\theta)d\theta$$ となる。

だから 答 $= \displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\,dx$

$$= \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)d\theta$$

サイクロイド $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

計算を続けるため、2 倍角公式を変形した式

$\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$ を利用して

サイクロイド $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

サイクロイド $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta$$

サイクロイド $x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$

$$\int \frac{3}{2}\,d\theta = \frac{3}{2}\theta + C$$

$$\int \cos\theta\,d\theta = \sin\theta + C$$

$$\int \cos 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta + C$$ を利用して

（公式だと思ってよいです）

サイクロイド $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

面積を求めなさい

$$= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 2 \cdot 2\pi \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 0 - 2\sin 0 + \frac{1}{4}\sin 0 \right)$$

面積を求めなさい

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 2\cdot 2\pi\right) \\
&\qquad - \left(\frac{3}{2}\cdot 0 - 2\sin 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) \\
&= \left(3\pi - 2\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0\right) - (0 - 0 + 0) \\
&= 3\pi \ \boxed{答}
\end{aligned}
$$