$\int e^x \sin x \, dx$ を求めなさい

何度か部分積分 web をすると、同じ部分が出てくる同形出現（どうけいしゅつげん）と呼ばれるタイプだ。

$$\int \bullet \blacktriangle' \, dx = \bullet \blacktriangle - \int \bullet' \blacktriangle \, dx$$

※ $\sin, \cos, e^x$ など微分しても変化が少ないものの積分は同形出現の可能性あり（特に $e, \sin$ または $e, \cos$ のペアはそうだ）

$\int e^x \sin x \, dx$ を求めなさい

$$\int \blacktriangle' \bullet \, dx = \blacktriangle \bullet - \int \blacktriangle \bullet' \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx \quad \text{と考えて}$$

$$= e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \, dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$(e^x)' = e^x \qquad (\sin x)' = \cos x$

$\int e^x \sin x \, dx$ を求めなさい

$$\int \blacktriangle' \bullet \, dx = \blacktriangle \bullet - \int \blacktriangle \bullet' \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x \, dx$$

もう一度部分積分

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' \, dx \right)$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \cdot - \sin x \, dx \right)$$

$(\cos x)' = -\sin x$

$\int e^x \sin x \, dx$ を求めなさい

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \cdot - \sin x \, dx \right)$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right)$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$$

$\int e^x \sin x\,dx$ を求めなさい

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C \quad \boxed{答}$$

（別解）微分から考える

$$(\blacktriangle\,\bullet)' = \blacktriangle'\,\bullet + \blacktriangle\,\bullet'$$

$$\begin{aligned}(e^x \sin x)' &= (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(e^x \cos x)' &= (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' \\ &= e^x \cos x + e^x (-\sin x) \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \quad \cdots ② \end{aligned}$$

（別解）微分から考える

$$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x \quad \cdots ①$$

$$(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x \quad \cdots ②$$

①−②

$$(e^x \sin x)' - (e^x \cos x)' = 2e^x \sin x$$

$$\frac{(e^x \sin x)' - (e^x \cos x)'}{2} = e^x \sin x$$

$$\int \frac{(e^x \sin x)' - (e^x \cos x)'}{2}\, dx = \int e^x \sin x \, dx$$

（別解）微分から考える

$$\int \frac{(e^x \sin x)' - (e^x \cos x)'}{2}\,dx = \int e^x \sin x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int (e^x \sin x)' - (e^x \cos x)'\,dx = \int e^x \sin x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\int (e^x \sin x)'\,dx - \int (e^x \cos x)'\,dx \right) = \int e^x \sin x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x \right) = \int e^x \sin x\,dx$$

$$\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C \quad \boxed{答} = \int e^x \sin x\,dx$$

$\int e^x \cos x \, dx$ も求められるので

$$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x \quad \cdots①$$

$$(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x \quad \cdots②$$

①+②

$$(e^x \sin x)' + (e^x \cos x)' = 2e^x \cos x$$

$$\frac{(e^x \sin x)' + (e^x \cos x)'}{2} = e^x \cos x$$

$$\int \frac{(e^x \sin x)' + (e^x \cos x)'}{2} dx = \int e^x \cos x \, dx$$

$\int e^x \cos x \, dx$ も求められるので

$$\int \frac{(e^x \sin x)' + (e^x \cos x)'}{2} \, dx = \int e^x \cos x \, dx$$

$$\frac{1}{2} \int (e^x \sin x)' + (e^x \cos x)' \, dx = \int e^x \cos x \, dx$$

$$\frac{1}{2} \left(\int (e^x \sin x)' \, dx + \int (e^x \cos x)' \, dx \right) = \int e^x \cos x \, dx$$

$$\frac{1}{2} \left(e^x \sin x + e^x \cos x \right) = \int e^x \cos x \, dx$$

$$\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C \quad \boxed{\text{答}} = \int e^x \cos x \, dx$$

瞬間部分積分

教科書には載っていませんが、受験テクニックで**瞬間部分積分** ▸web などと呼ばれるものがあります。

瞬間部分積分だとこうなると思う

$$\int e^x \sin x \, dx$$

そのまま　積分

$$+ \quad e^x \quad -\cos x$$

微分　積分

$$- \quad e^x \quad -\sin x$$

微分　積分

$$+ \quad e^x \quad \int -\sin x \, dx$$

$$e^x \int \sin x \, dx = \int e^x \sin x \, dx$$

なのか？　と疑問が出るだろう

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

瞬間部分積分だとこうなると思う

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2}$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(-\cos x + \sin x) + C \quad \boxed{答}$$

$\int e^{ax}\cos x\,dx$ を求めなさい

$$\int ●▲'\,dx = ●▲ - \int ●'▲\,dx$$

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = \int e^{ax}(\sin x)'\,dx$$ と考えて

$$= e^{ax}\sin x - \int (e^{ax})'\sin x\,dx$$

$$= e^{ax}\sin x - \int a e^{ax}\sin x\,dx$$

$(e^{ax})' = ae^{ax}$ $(\sin x)' = \cos x$

$\int e^{ax}\cos x\,dx$ を求めなさい

$$\int \bullet\blacktriangle'\,dx = \bullet\blacktriangle - \int \bullet'\blacktriangle\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos x\,dx &= e^{ax}\sin x - \int a e^{ax}\sin x\,dx \\
&= e^{ax}\sin x - a\int e^{ax}\sin x\,dx \\
&= e^{ax}\sin x - a\int e^{ax}(-\cos x)'dx
\end{aligned}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$\int e^{ax}\cos x\,dx$ を求めなさい

$$\int \bullet\blacktriangle'\,dx = \bullet\blacktriangle - \int \bullet'\blacktriangle\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos x\,dx &= e^{ax}\sin x - a\int e^{ax}(-\cos x)'dx \\
&= e^{ax}\sin x - a\left(-e^{ax}\cos x - \int (e^{ax})'\cdot -\cos x\,dx\right) \\
&= e^{ax}\sin x - a\left(-e^{ax}\cos x + \int (e^{ax})'\cos x\,dx\right) \\
&= e^{ax}\sin x - a\left(-e^{ax}\cos x + \int ae^{ax}\cos x\,dx\right)
\end{aligned}$$

$\int e^{ax}\cos x\,dx$ を求めなさい

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}\sin x - a\left(-e^{ax}\cos x + \int ae^{ax}\cos x\,dx\right)$$

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}\sin x - a\left(-e^{ax}\cos x + a\int e^{ax}\cos x\,dx\right)$$

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}\sin x + ae^{ax}\cos x - a^2\int e^{ax}\cos x\,dx$$

$$\int e^{ax}\cos x\,dx + a^2\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}\sin x + ae^{ax}\cos x$$

$$(1+a^2)\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}\sin x + ae^{ax}\cos x$$

$\int e^{ax}\cos x\,dx$ を求めなさい

$$(1+a^2)\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}\sin x + ae^{ax}\cos x$$

$$(1+a^2)\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}(\sin x + a\cos x)$$

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{1+a^2}(\sin x + a\cos x) + C$$ 答

頭がついて来るかな？