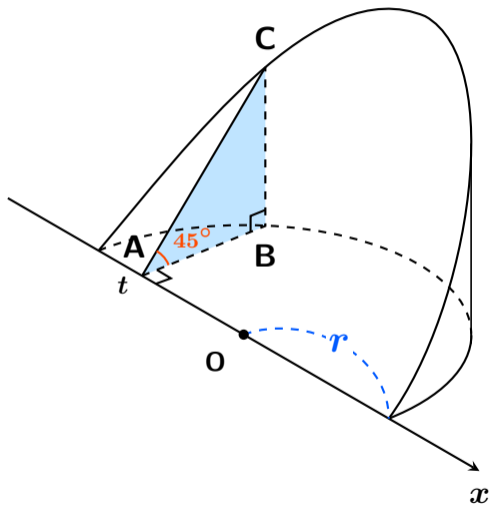


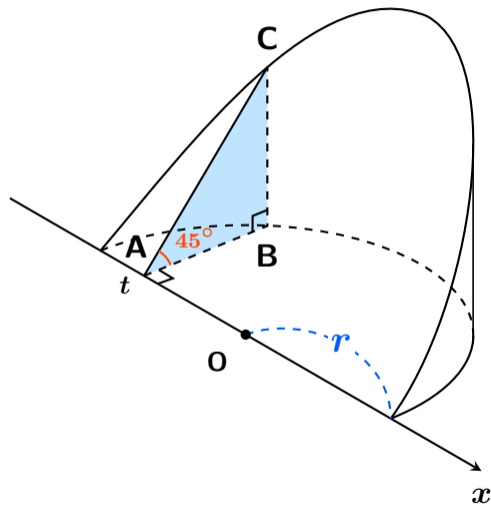
立体の体積（微分法）



半径が r の円柱がある。

底面の中心 O を通って、底面から 45° で切り取った部分の体積を求めなさい。

立体の体積 (微分法)



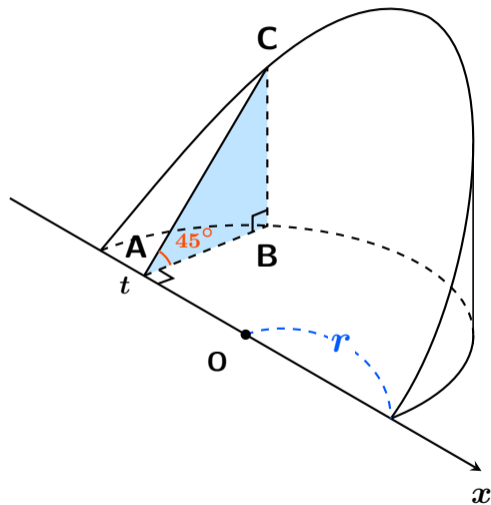
x 軸を左図のように決め、
点 A の x 座標を t とする。
 $OB = r$ なので三平方の定
理より

$$AB^2 + t^2 = r^2$$

$$AB^2 = r^2 - t^2$$

$$AB = \sqrt{r^2 - t^2}$$

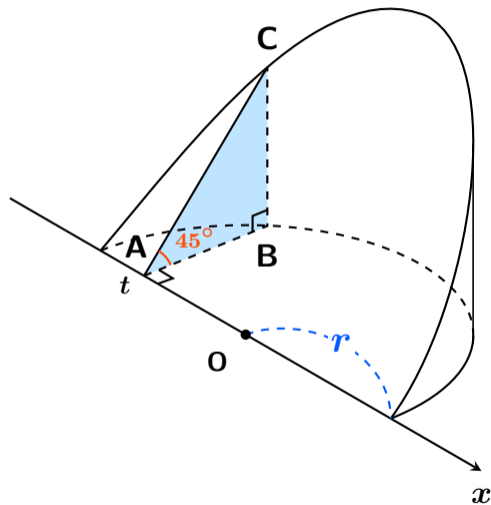
立体の体積 (微分法)



AB = BC なので $\triangle ABC$
の面積は $\frac{1}{2} \times \text{底辺} \times \text{高さ}$ に
代入して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - t^2} \cdot \sqrt{r^2 - t^2} \\ &= \frac{1}{2} (r^2 - t^2) \quad \text{となる。} \end{aligned}$$

立体の体積 (微分法)



よって体積は $-r \leq t \leq r$ の区間を積分すればよいので、次の式を計算すれば良い。

$$\int_{-r}^r \frac{1}{2} (r^2 - t^2) dt$$

立体の体積 (微分法)

$\int_{-r}^r \frac{1}{2}(r^2 - t^2) dt$ の値は $\int_0^r \frac{1}{2}(r^2 - t^2) dt$ の **2倍** になるので

$$\begin{aligned}\int_{-r}^r \frac{1}{2}(r^2 - t^2) dt &= 2 \int_0^r \frac{1}{2}(r^2 - t^2) dt \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - t^2) dt \\ &= \int_0^r (r^2 - t^2) dt\end{aligned}$$

立体の体積 (微分法)

$$\begin{aligned} & \int_0^r (r^2 - t^2) dt \\ &= \left[r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^r \\ &= \left(r^2 \cdot r - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(r^2 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \end{aligned}$$

立体の体積 (微分法)

$$= \left(r^2 \cdot r - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(r^2 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right)$$

$$= \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) - 0$$

$$= \frac{2}{3} r^3 \quad \boxed{\text{答}}$$