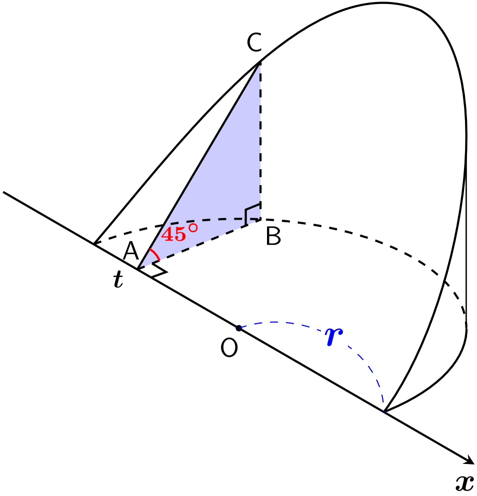
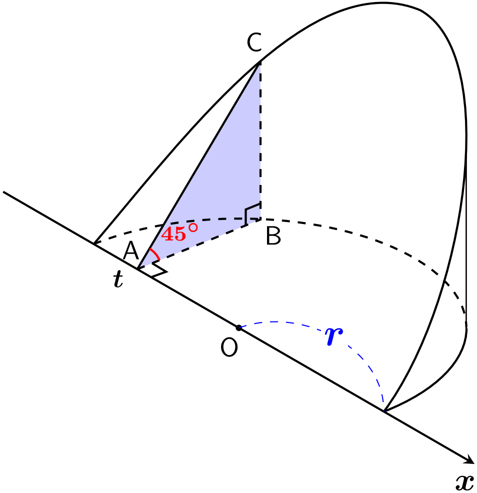
立体の体積（微分法）



半径が r の円柱がある。底面の中心Oを通って、底面から 45° で切り取った部分の体積を求めなさい。

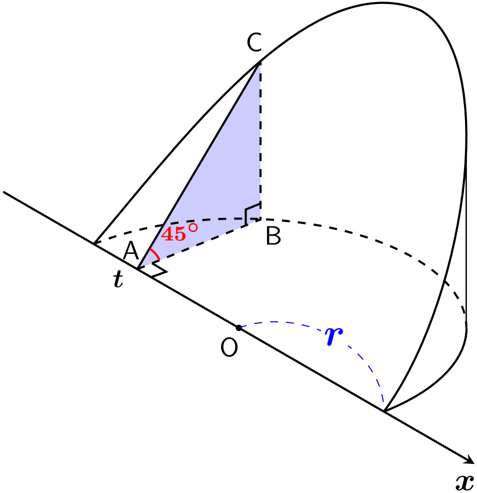
立体の体積（微分法）



x 軸を左図のように決め、点 A の x 座標を t とする。OB $= r$ なので三平方の定理より

$$\mathrm{AB}^2 + t^2 = r^2$$
$$\mathrm{AB}^2 = r^2 - t^2$$
$$\mathrm{AB} = \sqrt{r^2 - t^2}$$

立体の体積（微分法）

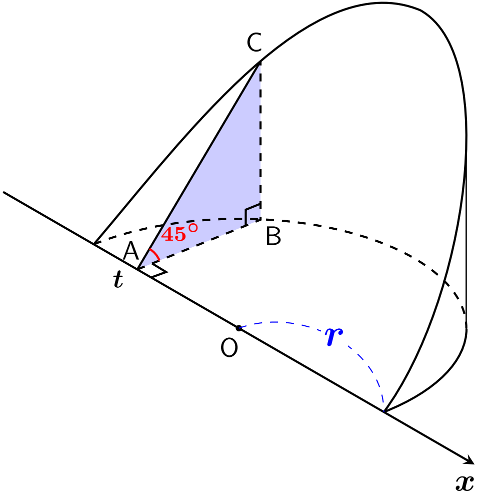


AB ＝ BCなので△ABCの面積は $\frac{1}{2}\times$底辺$\times$高さとなり

$$\frac{1}{2}\sqrt{r^2-t^2}\cdot\sqrt{r^2-t^2}$$

$$=\frac{1}{2}(r^2-t^2)$$

となる。



よって体積は $-r \leqq t \leqq r$ の区間を積分すればよいので

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - t^2)\, dt$$

立体の体積（微分法）

$$
\begin{aligned}
&\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - t^2)\ dt \\
=\ &\frac{1}{2}\int_{-r}^{r}(r^2 - t^2)\ dt \\
=\ &\frac{1}{2}\left[r^2 t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-r}^{r} \\
=\ &\frac{1}{2}\left\{\left(r^2 \cdot r - \frac{1}{3}r^3\right) - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{1}{3}(-r)^3\right)\right\}
\end{aligned}
$$

立体の体積（微分法）

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\{\left(r^2\cdot r-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(r^2\cdot(-r)-\frac{1}{3}(-r)^3\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(-r^3+\frac{1}{3}r^3\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}r^3-\left(-\frac{2}{3}r^3\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}r^3+\frac{2}{3}r^3\right\}
\end{aligned}
$$

立体の体積（微分法）

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}r^3+\frac{2}{3}r^3\right\}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}r^3\\
&= \frac{2}{3}r^3
\end{aligned}
$$