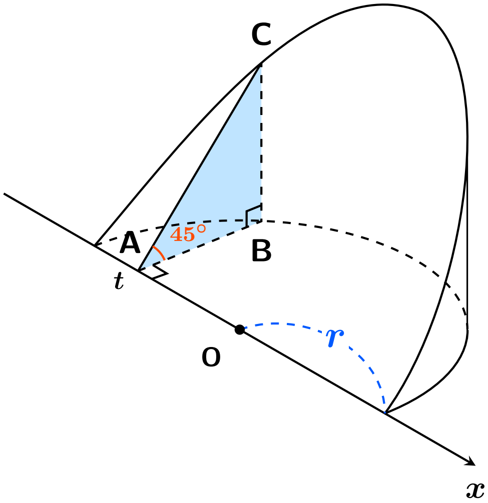
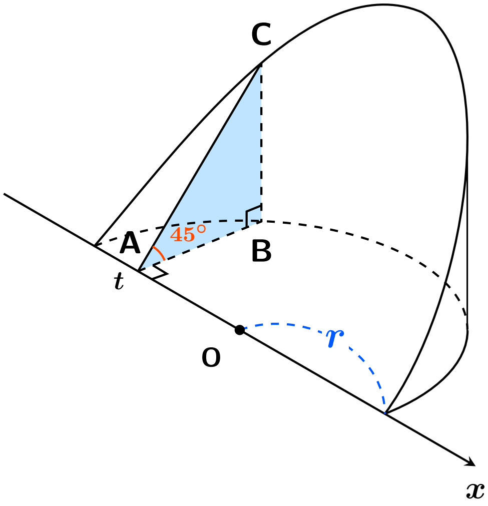
立体の体積（微分法）



半径が r の円柱がある。

底面の中心 O を通って、底面から 45° で切り取った部分の体積を求めなさい。

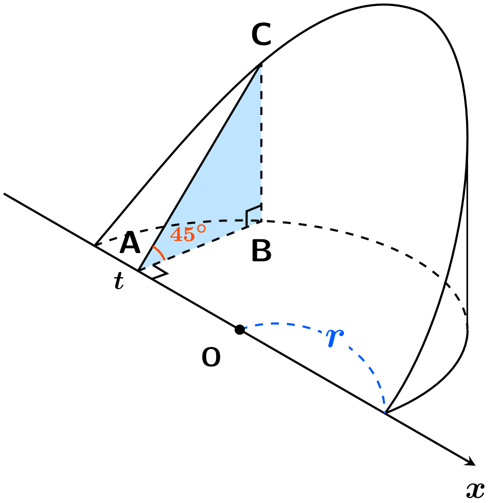
立体の体積（微分法）



x 軸を左図のように決め、点 A の x 座標を t とする。OB $= r$ なので三平方の定理より

$$\mathrm{AB}^2 + t^2 = r^2$$
$$\mathrm{AB}^2 = r^2 - t^2$$
$$\mathrm{AB} = \sqrt{r^2 - t^2}$$

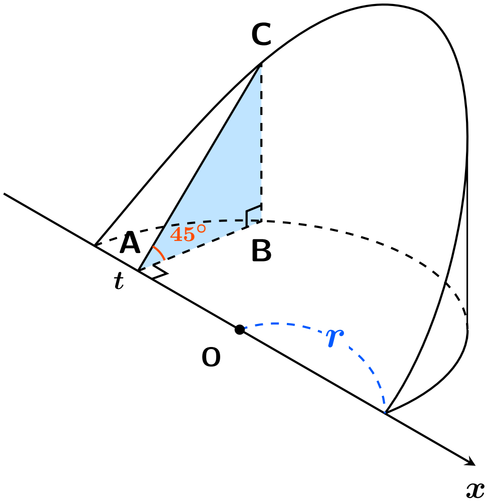
立体の体積（微分法）



AB ＝ BC なので △ABC の面積は $\dfrac{1}{2}$ × 底辺 × 高さ に代入して

$$\frac{1}{2}\sqrt{r^2-t^2}\cdot\sqrt{r^2-t^2}$$

$$=\ \frac{1}{2}(r^2-t^2)$$ となる。



よって体積は $-r \leqq t \leqq r$ の区間を積分すればよいので、次の式を計算すれば良い。

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - t^2)\ dt$$

立体の体積（微分法）

$\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - t^2)\ dt$ の値は $\displaystyle\int_{0}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - t^2)\ dt$ の 2 倍になるので

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - t^2)\ dt &= 2\int_{0}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - t^2)\ dt \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{r} (r^2 - t^2)\ dt \\ &= \int_{0}^{r} (r^2 - t^2)\ dt\end{aligned}$$

立体の体積（微分法）

$$\int_0^r (r^2 - t^2)\ dt$$

$$= \left[r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^r$$

$$= \left(r^2 \cdot r - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(r^2 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right)$$

立体の体積（微分法）

$$= \left(r^2 \cdot r - \frac{1}{3} r^3\right) - \left(r^2 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right)$$

$$= \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3\right) - 0$$

$$= \frac{2}{3} r^3 \quad \boxed{答}$$