

$y = \frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい

まず一回微分したい。次の公式を使う。

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

この問題の場合は、上記公式の変形版である

$$\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = - \frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

の方が適している。

$y = \frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい

公式 $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = - \frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ を使うと

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad \text{となる}$$

$y' = 0$ の解は？

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \quad \text{を解きたい。}$$

$$(x^2 + 1)^2 > 0 \quad \text{だから}$$

$$-2x = 0 \quad \text{を解いて}$$

$$x = 0$$

となる。

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \text{ が分かった}$$

さらにもう一回微分する。今度は次の公式を使う。

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$
$$y'' = \frac{(-2x)' \cdot (x^2+1)^2 - (-2x) \cdot ((x^2+1)^2)'}{((x^2+1)^2)^2}$$

まず $(-2x)' = -2$ はすぐ分かる。

$((x^2+1)^2)'$ を計算したい

次に $((x^2+1)^2)'$ を計算したい。

$y = f(u)$, $u = g(x)$ の合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数は $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ だから

$y = u^2$, $u = x^2 + 1$ と考えて

$((x^2+1)^2)'$ を計算したい

$$y = u^2, \quad u = x^2 + 1 \quad \text{だから}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u, \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \text{となって}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 2x = 2(x^2 + 1) \cdot 2x \\ &= 4x(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \text{ のとき } y'' = ?$$

$$(-2x)' = -2, \quad ((x^2+1)^2)' = 4x(x^2+1)$$

が分かったところで、元に戻って

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(-2x)' \cdot (x^2+1)^2 - (-2x) \cdot ((x^2+1)^2)'}{((x^2+1)^2)^2} \\ &= \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x) \cdot 4x(x^2+1)}{((x^2+1)^2)^2} \end{aligned}$$

$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ のとき $y'' = ?$

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x) \cdot 4x(x^2+1)}{((x^2+1)^2)^2} \\&= \frac{-2(x^2+1)^2 + 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\&= \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3}\end{aligned}$$

$y'' = 0$ を解くと？

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}\end{aligned}$$

が分かった。次に $y'' = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} = 0$ を解く。

$y''=0$ を解くと？

$$\frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \quad \text{は} \quad 6x^2 - 2 = 0 \quad \text{となって}$$

$$6x^2 = 2$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...
y'				0			
y''		0				0	
y							

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''		0				0	
y							

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y							

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...
y'	\nearrow	\nearrow	\nearrow	0	\searrow	\searrow	\searrow
y''	+	0	-	-	-	0	+
y							












$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...
y'				0			
y''		0				0	
y							
















$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...
y'				0			
y''		0				0	
y							
















$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...
y'				0			
y''		0				0	
y							

$x = 0, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ のときの y の値を求めると

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{9} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$x=0$ のとき
















$$y = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{0^2+1} = 1$$

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

よって増減表は

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...
y'				0			
y''		0				0	
y		$\frac{3}{4}$		1		$\frac{3}{4}$	

$y = \frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい

さらに

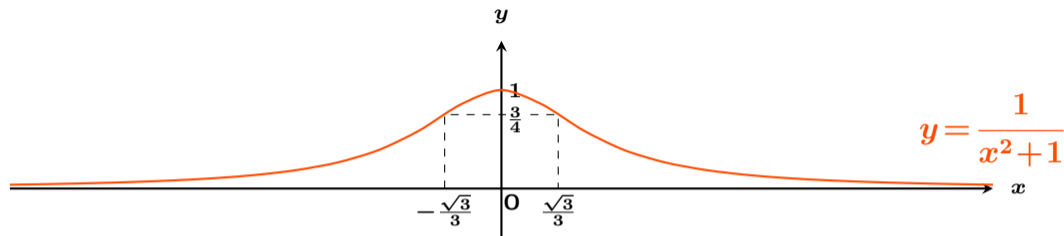
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

同様に

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

となるので、グラフは

$y = \frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい



x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...
y'	\nearrow	\nearrow	\nearrow	0	\searrow	\searrow	\searrow
y''	\cup	0	\cap	\cap	\cap	0	\cup
y	\curvearrowright	$\frac{3}{4}$	\curvearrowleft	1	\curvearrowright	$\frac{3}{4}$	\curvearrowleft