# $y=\frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい

まず一回微分したい。次の公式を使う。

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

この問題の場合は、上記公式の変形版である

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

の方が適している。

# $y=\frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい

公式 $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ を使うと

$y'=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ となる

## $y' = 0$ の解は？

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0$$ を解きたい。

$(x^2+1)^2 > 0$ だから

$$-2x = 0$$ を解いて

$$x = 0$$

となる。

# $y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ が分かった

さらにもう一回微分する。今度は次の公式を使う。

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$y'' = \frac{(-2x)' \cdot (x^2+1)^2 - (-2x) \cdot \left((x^2+1)^2\right)'}{\left((x^2+1)^2\right)^2}$$

まず　$(-2x)' = -2$　はすぐ分かる。

# $((x^2+1)^2)'$ を計算したい

次に $((x^2+1)^2)'$ を計算したい。

$y=f(u),\ u=g(x)$ の合成関数 $y=f(g(x))$ の導関数は $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ だから

$y=u^2,\quad u=x^2+1$ と考えて

# $((x^2+1)^2)'$ を計算したい

$y = u^2, \qquad u = x^2 + 1$ だから

$\dfrac{dy}{du} = 2u, \qquad \dfrac{du}{dx} = 2x$ となって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 2x = 2(x^2+1) \cdot 2x$$

$$= 4x(x^2+1)$$

# $y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ のとき $y'' = ?$

$(-2x)' = -2, \quad ((x^2+1)^2)' = 4x(x^2+1)$

が分かったところで、元に戻って

$$y'' = \frac{(-2x)' \cdot (x^2+1)^2 - (-2x) \cdot ((x^2+1)^2)'}{\left((x^2+1)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x) \cdot 4x(x^2+1)}{\left((x^2+1)^2\right)^2}$$

## $y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ のとき $y''$ =？

$$y'' = \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x)\cdot 4x(x^2+1)}{\left((x^2+1)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+1)^2 + 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3}$$

# $y'' = 0$ を解くと？

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}
\end{aligned}
$$

が分かった。次に　$y'' = \dfrac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3} = 0$　を解く。

# $y'' = 0$ を解くと？

$\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0$　は　$6x^2 - 2 = 0$ となって

$$\begin{aligned} 6x^2 &= 2 \\ 3x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{x^2+1} \qquad y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | | | $0$ | | | |
| $y''$ | | $0$ | | | | $0$ | |
| $y$ | | | | | | | |

$$y = \frac{1}{x^2+1} \qquad y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | | $0$ | | | | $0$ | |
| $y$ | | | | | | | |

$y=\frac{1}{x^2+1}$　　$y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$　　$y''=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$y'=0$ の解は $x=0$　　$y''=0$ の解は $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | | | | | | | |

$$y=\frac{1}{x^2+1} \qquad y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y''=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0$ の解は $x=0$

$y''=0$ の解は $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |
| $y''$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | | | | | | | |

$$y=\frac{1}{x^2+1} \qquad y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y''=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0$ の解は $x=0$

$y''=0$ の解は $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |
| $y''$ | $\smile$ | $0$ | $\frown$ | $\frown$ | $\frown$ | $0$ | $\smile$ |
| $y$ | | | | | | | |

$$y = \frac{1}{x^2+1} \qquad y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |
| $y''$ | $\smile$ | $0$ | $\frown$ | $\frown$ | $\frown$ | $0$ | $\smile$ |
| $y$ | ⤴ | | ↷ | | ⤵ | | ↳ |

$$y = \frac{1}{x^2+1} \qquad y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |
| $y''$ | $\cup$ | $0$ | $\cap$ | $\cap$ | $\cap$ | $0$ | $\cup$ |
| $y$ | ⤴ | | ↷ | | ⤵ | | ↳ |

$x = 0, \ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ のときの $y$ の値を求めると

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ **のとき**

$$y=\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{9}+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

$x = 0$ のとき

$$y = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{0^2+1} = 1$$

$$y = \frac{1}{x^2+1} \qquad y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

# よって増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |
| $y''$ | $\smile$ | $0$ | $\frown$ | $\frown$ | $\frown$ | $0$ | $\smile$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{3}{4}$ | $\searrow$ |

さらに

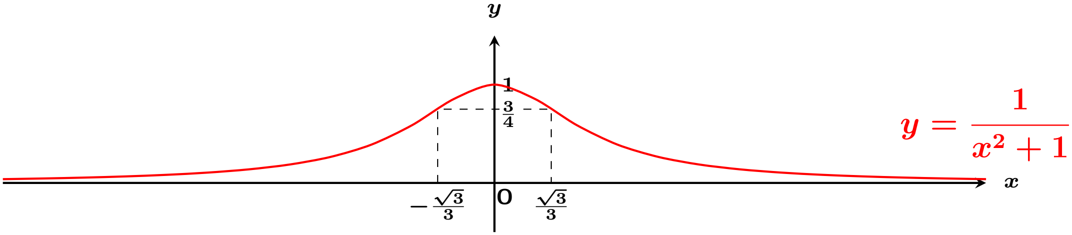
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

同様に

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

となるので、グラフは

# $y=\frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい




| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | ↗ | ↗ | ↗ | $0$ | ↘ | ↘ | ↘ |
| $y''$ | ∪ | $0$ | ∩ | ∩ | ∩ | $0$ | ∪ |
| $y$ | ⤴ | $\frac{3}{4}$ | ↗ | $1$ | ↘ | $\frac{3}{4}$ | ⤵ |