

## 関数の長さ (積分)

**問題**

$y = x^{\frac{3}{2}}$  の、区間  $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$  における長さを求めなさい。


# 公式はこれです

**公式**

$y = f(x)$  の区間  $a \leq x \leq b$  における  
長さ  $s$  は

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \quad dx$$

## まず $f'(x)$ を求める

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$  を微分すると  $f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$  となる。

積分する区間は  $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$  なので、公式に代入して

# 公式の代入して整理する

$$\begin{aligned} & \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} \, dx \end{aligned}$$

# 置換積分を使う

$$= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \, dx$$



$u = 1 + \frac{9}{4}x$  と置いて置換積分をする

$u = 1 + \frac{9}{4}x$  の置換積分は…

$u = 1 + \frac{9}{4}x$  の両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{du}{dx} = \frac{9}{4}$$

$$9 dx = 4 du$$

$$dx = \frac{4}{9} du$$



## 積分の区間を求める

$u = 1 + \frac{9}{4}x$  なので  $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$  のとき

$$x = 0 \text{ では } 1 + \frac{9}{4} \times 0 = 1 \quad \text{一旦停止}$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ では } 1 + \frac{9}{4} \times \frac{4}{3} = 4 \quad \text{一旦停止}$$

なので  $1 \leq u \leq 4$  となる。

あとは、これを計算するだけ

元に戻って、すべてをまとめると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx &= \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} \frac{4}{9} du \\ &= \frac{4}{9} \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du\end{aligned}$$



# ひたすら計算

$$= \frac{4}{9} \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{4}{9} \left[ \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} \left[ u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$= \frac{8}{27} \left( 4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{8}{27} (4\sqrt{4} - 1)$$

## やっと答えにたどり着いた

$$= \frac{8}{27} (4\sqrt{4} - 1) = \frac{8}{27} (8 - 1)$$

$$= \frac{8}{27} \times 7 = \frac{56}{27} \quad \boxed{\text{答}}$$

頭がついて来ますか？