関数の長さ（積分）

$y = x^{\frac{3}{2}}$の、区間$0 \leqq x \leqq \dfrac{4}{3}$における長さを求めなさい。

公式

$y=f(x)$の、区間$a \leqq x \leqq b$における長さsは

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

関数の長さ（積分）

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$を微分すると$f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$となる。

積分する区間は$0 \leqq x \leqq \dfrac{4}{3}$なので

関数の長さ（積分）

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

関数の長さ（積分）

$$= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$u = 1 + \dfrac{9}{4}x$と置いて**置換積分**をする

関数の長さ（積分）

$u = 1 + \frac{9}{4}x$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{du}{dx} = \frac{9}{4}$$

$$9\,dx = 4\,du$$

$$dx = \frac{4}{9}\,du$$

関数の長さ（積分）

$u=1+\frac{9}{4}x$ なので $0 \leqq x \leqq \frac{4}{3}$ のとき

$$x=0 \text{ では } 1+\frac{9}{4}\times 0=1$$

$$x=\frac{4}{3} \text{ では } 1+\frac{9}{4}\times\frac{4}{3}=4$$

なので $1 \leqq u \leqq 4$ となる。

関数の長さ（積分）

$$\int_0^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} \frac{4}{9} du$$

$$= \frac{4}{9} \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du$$

関数の長さ（積分）

$$= \frac{4}{9}\int_1^4 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{8}{27}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{27}\left(4\sqrt{4} - 1\right)$$

関数の長さ（積分）

$$= \frac{8}{27}\left(4\sqrt{4} - 1\right) = \frac{8}{27}(8 - 1)$$

$$= \frac{8}{27} \times 7 = \frac{56}{27}$$