関数の長さ（積分）

問題 $y = x^{\frac{3}{2}}$ の、区間 $0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$ における長さを求めなさい。

公式はこれです

公式　$y = f(x)$ の区間 $a \leq x \leq b$ における長さ s は

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\ dx$$

まず $f'(x)$ を求める

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ を微分すると $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ となる。 一旦停止

積分する区間は $0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$ なので、公式に代入して

公式の代入して整理する

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\ dx \\
&= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\ dx \\
&= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ dx
\end{aligned}
$$

置換積分を使う

$$= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \quad dx$$

$$= \int_0^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

一旦停止

$u = 1 + \frac{9}{4}x$ と置いて**置換積分**をする

dx を du で表すと

$u = 1 + \dfrac{9}{4}x$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{du}{dx} = \frac{9}{4}$$

$$9\,dx = 4\,du$$

$$dx = \frac{4}{9}du$$

一旦停止

積分の区間を求める

$u = 1 + \dfrac{9}{4}x$ なので $0 \leqq x \leqq \dfrac{4}{3}$ のとき

$x = 0$ では $1 + \dfrac{9}{4} \times 0 = \boxed{1}$ 一旦停止

$x = \dfrac{4}{3}$ では $1 + \dfrac{9}{4} \times \dfrac{4}{3} = \boxed{4}$ 一旦停止

なので $\boxed{1} \leqq u \leqq \boxed{4}$ となる。

元に戻って、すべてをまとめると

$$\int_0^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{4}} u^{\frac{1}{2}} \frac{4}{9} du$$

$$= \frac{4}{9} \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du$$

ひたすら計算

$$= \frac{4}{9}\int_1^4 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \qquad = \frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{8}{27}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) \qquad = \frac{8}{27}\left(4\sqrt{4} - 1\right)$$

やっと答えにたどり着いた

$$= \frac{8}{27}\left(4\sqrt{4} - 1\right) \quad = \frac{8}{27}(8 - 1)$$

$$= \frac{8}{27} \times 7 \quad = \frac{56}{27}$$ 答

頭がついて来ますか？